Kantonalno takmičenje iz matematike učenika srednjih škola sa područja TK

Kalesija

06.04.2013.

ZADACI

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona iz MATEMATIKE

Kalesija, 06. april 2013. godine

I RAZRED

Zadatak 1. Srediti izraz

$$\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}.$$

Zadatak 2. U skupu prostih brojeva riješiti jednačinu

$$2p^3-q^2=2(p+q)^2.$$

Zadatak 3. Tačka M uzeta je na kateti BC pravouglog trougla ABC tako da vrijedi $BM=2\cdot MC$. Sa K označimo sredinu hipotenuze AB. Dokazati da je $\angle BAM=\angle MKC$.

Zadatak 4. Ako realni brojevi a,b,c,d različiti od nule zadovoljavaju jednakosti

$$a+b+c+d=0,\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{abcd}=0$$

odrediti koje sve vrijednosti može poprimiti izraz

$$(ab-cd)(c+d).$$

****

Svaki tačno urađeni zadatak boduje se sa 10 bodova.

Izrada zadataka traje 180 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona iz MATEMATIKE

Kalesija, 06. april 2013. godine

II RAZRED

Zadatak 1. Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe zadovoljavaju relacije

$$x_1 + x_2 - 2x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$mx_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) = 2m - 1$$

$a)$ Formirati ovu jednadžbu.

$b)$ Za koje vrijednosti parametra m su oba njena rješenja realni brojevi?

Zadatak 2. Odrediti sve parove (p, q) prostih brojeva koji zadovoljavaju jednakost

$$p + q = (p - q)^3 .$$

Zadatak 3. Neka je L proizvoljna tačka na kraćem luku $\overset{\frown}{CD}$ kružnice opisane oko kvadrata $ABCD$. Označimo sa K tačku presjeka pravih AL i CD, sa M tačku presjeka pravih AD i CL a sa N tačku presjeka pravih MK i BC.

$a)$ Dokazati da je tačka K ortocentar trougla MAC.

$b)$ Dokazati da su tačke B, L, M i N konciklične.

Zadatak 4. Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b, c, d vrijedi nejednakost

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0.$$

****

Svaki tačno urađeni zadatak boduje se sa 10 bodova.

Izrada zadataka traje 180 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona iz MATEMATIKE

Kalesija, 06. april 2013. godine

III RAZRED

Zadatak 1. Naći sve vrijednosti $k \in \mathbb{R}^+$ za koje jednadžba

$$\frac{\log kx}{\log (x+1)} = 2$$

ima tačno jedno rješenje.

Zadatak 2. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi čija je suma jednaka 3. Dokazati da je $3a + bc = (a+b)(a+c)$ i da vrijedi nejednakost

$$\frac{a+3}{3a+bc} + \frac{b+3}{3b+ca} + \frac{c+3}{3c+ab} \geq 3.$$

Zadatak 3. Dat je trougao ABC u kome je $\angle CAB = 15^\circ$ i $\angle ABC = 30^\circ$. Sa M označimo sredinu stranice AB.

$a)$ Dokazati da je $\angle ACM = 30^\circ$.

$b)$ Dokazati da je

$$CM = \frac{AB \cdot BC}{2AC}.$$

Zadatak 4. Odrediti sve parove (m, n) prirodnih brojeva koji zadovoljavaju jednakost

$$2 \cdot (n!) = m! \cdot (m! + 2)$$

gdje $k!$ označava proizvod svih prirodnih brojeva od 1 do k.

****

Svaki tačno urađeni zadatak boduje se sa 10 bodova.

Izrada zadataka traje 180 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona iz MATEMATIKE

Kalesija, 06. april 2013. godine

IV RAZRED

Zadatak 1. Četiri broja čine geometrijski niz. Njihovi logaritmi za bazu 3 čine aritmetički niz čija je razlika 1, a zbir 18. Odrediti te brojeve.

Zadatak 2. U skupu realnih brojeva riješiti sistem jednačina

$$x + y^2 = y^3$$

$$y + x^2 = x^3$$

Zadatak 3. Simetrala ugla kod vrha A trougla ABC siječe stranicu BC u tački D. Ukoliko je poznato da je $CD \cdot BD = AD^2$ i $\angle ADB = 45^\circ$

$a)$ dokazati da je $\angle ABC - \angle ACB = 90^\circ$.

$b)$ izračunati vrijednost ugla BAC.

Zadatak 4. U skupu prostih brojeva riješiti jednačinu

$$xyz + 1 = 2^{y^2+1}.$$

****

Svaki tačno urađeni zadatak boduje se sa 10 bodova.

Izrada zadataka traje 180 minuta.

RJEŠENJA

PRVI RAZRED

Zadatak 1. Srediti izraz

$$\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}.$$

Rješenje: Imamo

$$\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}=$$

$$\frac{x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=$$

$$\frac{-x^2(y-z)+xy^2-y^2z+yz^2-xz^2}{(x-y)(y-z)(z-x)}=$$

$$\frac{-x^2(y-z)+x\left(y^2-z^2\right)-yz(y-z)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=$$

$$\frac{(y-z)\left(-x^2+xy+xz-yz\right)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=$$

$$\frac{(y-z)[x(z-x)-y(z-x)]}{(x-y)(y-z)(z-x)}=$$

$$\frac{(y-z)(x-y)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1.$$

Drugo rješenje: Lagano računamo da je

$$(x-y)(y-z)(z-x)=x^2z-x^2y+y^2x-y^2z+z^2y-z^2x$$

te je stoga

$$\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}=$$

$$\frac{x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=$$

$$\frac{x^2z-x^2y+y^2x-y^2z+z^2y-z^2x}{x^2z-x^2y+y^2x-y^2z+z^2y-z^2x}=1.$$

Zadatak 2. U skupu prostih brojeva riješiti jednačinu

$$2p^3-q^2=2(p+q)^2.$$

Rješenje: Desna strana date jednakosti je paran broj što znači da i $2p^3-q^2$ također mora biti paran odakle slijedi da je q^2 paran. Iz ovoga slijedi da da je q paran a kako je q prost to mora biti $q=2$ i data jednačina postaje

$$2p^3-4=2(p+2)^2$$

što nakon dijeljenja obje strane sa 2 i sređivanja postaje

$$p^3-p^2-4p-6=0$$

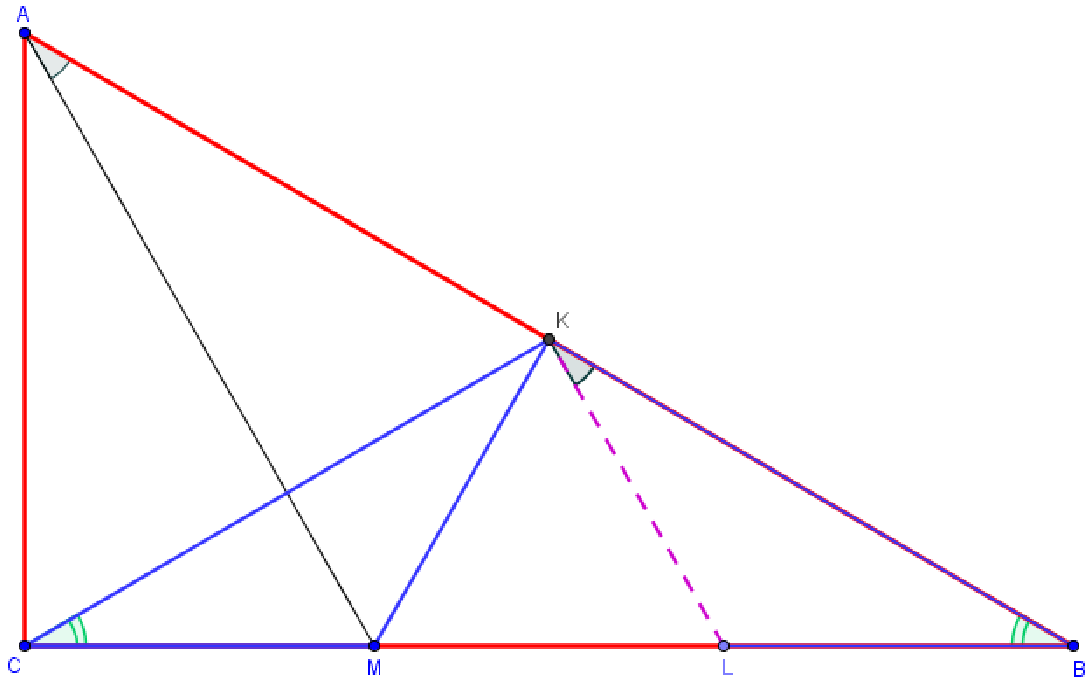
a ovo je dalje ekvivalentno sa

$$p\left(p^2-p-4\right)=6$$

odakle zaključujemo da $p\mid 6 \;\Rightarrow p=2$ ili $p=3$
Lagano se provjerava da je gornja jednakost zadovoljena samo za $p=3$ te je stoga par $(p,q)=(3,2)$ jedino rješenje date jednačine.

Zadatak 3. Tačka M uzeta je na kateti BC pravouglog trougla ABC tako da vrijedi $BM=2\cdot MC$. Sa K označimo sredinu hipotenuze AB. Dokazati da je $\angle BAM=\angle MKC$.

Rješenje: Označimo sa L sredinu segmenta BM. Uočimo da je LK srednja linija trougla MBA pa je $LK \parallel MA$ odakle slijedi $\angle BAM = \angle BKL$ te je stoga dovoljno dokazati da je $\angle BKL = \angle MKC$.



Posmatrajmo trouglove LKB i MKC. Imamo

$$KB = KC$$

(jer je K sredina hipotenuze AB pravouglog trougla ABC)

$$BL = \frac{1}{2} \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot CM = CM$$

a iz jednakosti $KB = KC$ slijedi $\angle KBC = \angle KCB$ pa je

$$\angle KBL = \angle KCM$$

te su stoga trouglovi LKB i MKC podudarni (pravilo SUS) i iz ove podudarnosti slijedi $\angle BKL = \angle MKC$ te je ovim dokaz završen.

Zadatak 4. Ako realni brojevi a, b, c, d različiti od nule zadovoljavaju jednakosti

$$a+b+c+d=0, \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{abcd}=0$$

odrediti koje sve vrijednosti može poprimiti izraz

$$(ab-cd)(c+d).$$

Rješenje: Iz

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{abcd}=0$$

imamo

$$\frac{bcd+cda+dab+abc+1}{abcd}=0$$

odakle slijedi

$$bcd+cda+dab+abc=-1$$

Iz prve jednakosti je $c+d=-(a+b)$. Koristeći se ovim jednakostima imamo

$$(ab-cd)(c+d)=ab(c+d)-cd(c+d)=abc+abd+cd(a+b)=$$

$$abc+abd+cda+cdb=-1$$

iz čega zaključujemo da je $(ab-cd)(c+d)=-1$ za sve vrijednosti realnih brojeva a, b, c, d različitih od nule koji zadovoljavaju jednakosti iz uslova zadatka.

DRUGI RAZRED

Zadatak 1. Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe zadovoljavaju relacije

$$x_1 + x_2 - 2x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$mx_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) = 2m - 1$$

a) Formirati ovu jednadžbu.

b) Za koje vrijednosti parametra m su oba njena rješenja realni brojevi?

Rješenje: a) Bez narušavanja opštosti možemo pretpostaviti da je koeficijent uz x^2 naše jednadžbe jednak 1 (ukoliko to nije slučaj tada jednadžbu možemo podijeliti sa vodećim koeficijentom i korijeni tako dobijene jednadžbe su očigledno x_1 i x_2 a njen vodeći koeficijent jednak 1) i neka je naša jednadžba $x^2 + px + q = 0$. Na osnovu $Vietovih$ $formula$ imamo

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

pa uvrštavajući ovo u uslov zadatka imamo

$$-p - 2q = 0$$

$$mq + p = 2m - 1$$

Iz prve jednadžbe nalazimo $p = -2q$ a druga jednadžba je ekvivalentna sa (uvrstimo $p = -2q$)

$$(m-2)\,q = 2m - 1$$

odakle nalazimo

$$q = \frac{2m-1}{m-2} \quad (m \neq 2)$$

pa je

$$p = -2 \cdot \frac{(2m-1)}{m-2} = -\frac{4m-2}{m-2}$$

te je stoga tražena jednadžba

$$x^2 - \frac{4m-2}{m-2}x + \frac{2m-1}{m-2} = 0$$

$b)$ Dobijena jednadžba je ekvivalentna sa

$$(m-2)\,x^2 - 2\,(2m-1)\,x + 2m - 1 = 0$$

i da bi njena rješenja bila realni brojevi potrebno i dovoljno je da je njena diskriminanta

$$D = \left[-2\,(2m-1)\right]^2 - 4\cdot(m-2)\cdot(2m-1) = 4\left(2m^2+m-1\right)$$

nenegativna tj. $D \geq 0$ što je ekvivalentno sa

$$2m^2 + m - 1 \geq 0$$

a ovo je dalje ekvivalentno sa

$$(2m-1)\,(m+1) \geq 0$$

Proizvod na lijevoj strani je nenegativan ukoliko su obje zagrade pozitivne ili ukoliko su obje zagrade negativne i rješavajući oba slučaja nalazimo da je $(2m-1)\,(m+1) \geq 0$ zadovoljeno za

$$m \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Rješenja nejednadžbe $2m^2 + m - 1 \geq 0$ je također moguće odrediti i posmatranjem grafika kvadratne funkcije $f\,(m) = 2m^2 + m - 1$.

Zadatak 2. Odrediti sve parove (p,q) prostih brojeva koji zadovoljavaju jednakost

$$p + q = (p-q)^3\,.$$

Rješenje: Dokažimo da jedan od brojeva p, q mora biti djeljiv sa 3. Naime, ako niti jedan od ovih brojeva nije djeljiv sa 3 tada imamo sljedeće mogućnosti

1. $p \equiv 1 \pmod 3$ $q \equiv 1 \pmod 3$ i tada je $p + q \equiv 2 \pmod 3$ dok je $(p-q)^3 \equiv 0 \pmod 3$ pa ova mogućnost otpada
2. $p \equiv 1 \pmod 3$ $q \equiv 2 \pmod 3$ i tada je $p + q \equiv 3 \equiv 0 \pmod 3$ dok je $(p-q)^3 \equiv 2^3 \equiv 2 \pmod 3$ pa i ova mogućnost otpada
3. $p \equiv 2 \pmod 3$ $q \equiv 1 \pmod 3$ i tada je $p + q \equiv 3 \equiv 0 \pmod 3$ dok je $(p-q)^3 \equiv 1^3 \equiv 1 \pmod 3$ pa i ova mogućnost otpada

4. $p \equiv 2 \pmod 3$ $q \equiv 2 \pmod 3$ i tada je $p + q \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3$ dok je $(p - q)^3 \equiv 0 \pmod 3$ pa i ova mogućnost otpada

Dakle bar jedan od brojeva p i q mora biti djeljiv sa 3 a kako su p i q prosti brojevi to on mora biti jednak 3.
Iz date jednačine očigledno mora biti $p - q > 0$ pa u slučaju $p = 3$ mora biti $q = 2$ i jednostavnom provjerom utvrđujemo da par $(3, 2)$ nije rješenje date jednačine. Neka je sada $q = 3$. Imamo

$$p + 3 = (p - 3)^3 = p^3 - 9p^2 + 27p - 27$$

a iz posljednje jednakosti je

$$p^3 - 9p^2 + 26p = 30$$

odakle slijedi

$$p\left(p^2 - 9p + 26\right) = 30$$

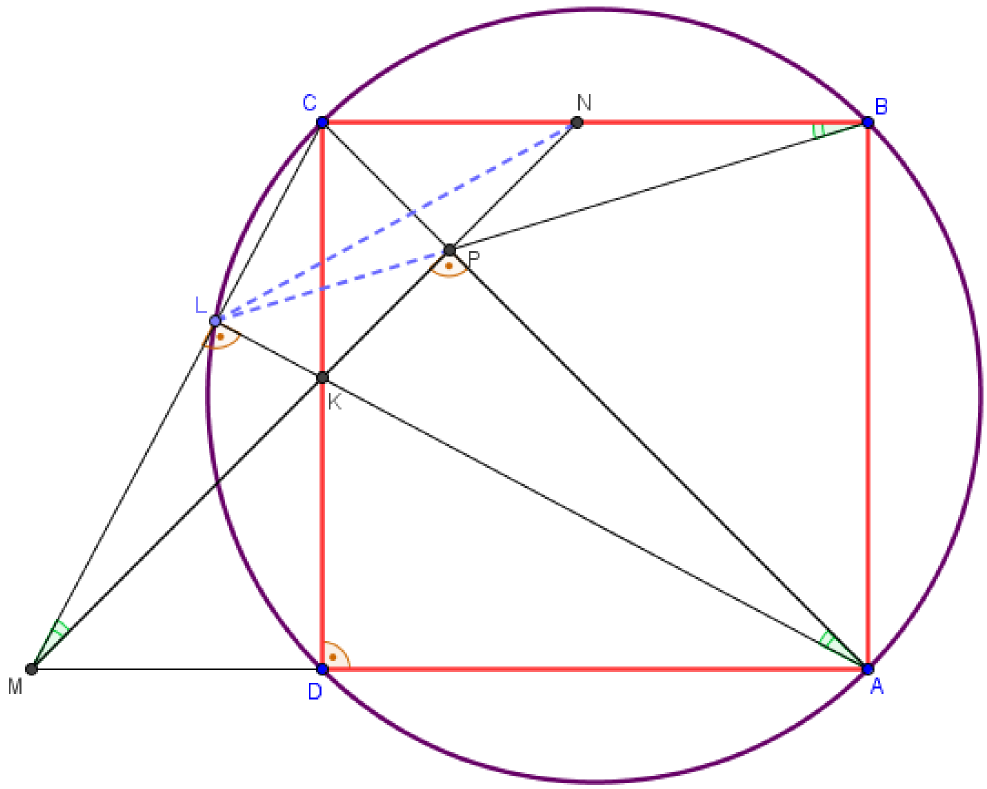
pa $p \mid 30 \Rightarrow p \in \{2, 3, 5\}$ ali budući da mora biti ispunjena i nejednakost $p - q > 0$ to je $p = 5$ jedina mogućnost. Provjerom utvrđujemo da par $(5, 3)$ zadovoljava datu jednačinu te je stoga ovaj par jedino rješenje.

Zadatak 3. Neka je L proizvoljna tačka na kraćem luku $\overset{\frown}{CD}$ kružnice opisane oko kvadrata $ABCD$. Označimo sa K tačku presjeka pravih AL i CD, sa M tačku presjeka pravih AD i CL a sa N tačku presjeka pravih MK i BC.

a) Dokazati da je tačka K ortocentar trougla MAC

b) Dokazati da su tačke B, L, M i N konciklične.

Rješenje: *a*) Kako je AC prečnik kružnice opisane oko kvadrata $ABCD$ imamo da je $\angle ALC = 90^\circ$, tj. $AL \perp MC$. Također je i $CD \perp AM$ (jer je $\angle CDA = 90^\circ$) odakle zaključujemo da visine AL i CD trougla MAC prolaze tačkom K pa je K ortocentar ovog trougla.



b) Označimo sa P tačku presjeka pravih MN i AC. Dovoljno je dokazati da je $\angle LMN = \angle LBN$. Neka je $\angle LBN = \varphi$. Budući da tačke A, B, C i L leže na krugu opisanom oko kvadrata $ABCD$ to na osnovu jednakosti periferijskih uglova nad tetivom CL imamo

$$\angle CAL = \angle CBL = \varphi$$

Kako je K ortocentar trougla AMC to je $MP \perp AC$ te je stoga u četvrouglu $MAPL$

$$\angle MPA = \angle MLA = 90^\circ$$

pa je ovaj četverougao tetivan odakle na osnovu jednakosti periferijskih uglova nad tetivom LP slijedi

$$\angle LMP = \angle LAP = \angle LAC = \varphi = \angle LBN$$

kako je $\angle LMP = \angle LMN$ to je ovim dokaz završen.

Zadatak 4. Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b, c, d vrijedi nejednakost

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0$$

Rješenje: Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine za pozitivne realne brojeve x i y imamo

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{x}}+\frac{1}{\frac{1}{y}}} = \frac{2}{x+y} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

Uočimo da je

$$\frac{a-b}{b+c}+1 = \frac{a-b+b+c}{b+c} = \frac{a+c}{b+c}$$

i slično dodajući po 1 svakom sabirku lijeve strane dobijamo da je data nejednakost ekvivalentna sa

$$\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b} \geq 4$$

Imamo

$$\frac{a+c}{b+c}+\frac{c+a}{d+a} = (a+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right) \geq (a+c)\,\frac{4}{b+c+d+a}$$

i

$$\frac{b+d}{c+d}+\frac{d+b}{a+b} = (b+d)\left(\frac{1}{c+d}+\frac{1}{a+b}\right) \geq (b+d)\,\frac{4}{c+d+a+b}$$

te sumirajući gornje nejednakosti dobijamo

$$\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b} \geq \frac{4\,(a+c)+4\,(b+d)}{a+b+c+d} = 4$$

Drugo rješenje: Analogno kao u prvom rješenju zaključujemo da je dovoljno dokazati da je

$$\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b} \geq 4$$

Na osnovu $Koši-Švarcove$ nejednakosti imamo

$$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2\right) \geq \left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4\right)^2$$

pa koristeći se ovom nejednakošću za

$$(a_1,a_2,a_3,a) = \left(\sqrt{\frac{a+c}{b+c}},\sqrt{\frac{b+d}{c+d}},\sqrt{\frac{c+a}{d+a}},\sqrt{\frac{d+b}{a+b}}\right)$$

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) =$$

$$\left(\sqrt{(a+c)(b+c)}, \sqrt{(b+d)(c+d)}, \sqrt{(c+a)(d+a)}, \sqrt{(d+b)(a+b)}\right)$$

dobijamo

$$\frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} \geq \frac{(a+c+b+d+c+a+d+b)^2}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2} =$$

$$\frac{4(a+b+c+d)^2}{(a+b+c+d)^2} = 4$$

pri čemu smo u posljednjem koraku koristili jednakost

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = (a+b+c+d)^2$$

čiju je tačnost trivijalno provjeriti.
Znak jednakosti se dostiže ako i samo ako je $a = b = c = d = 1$.

TREĆI RAZRED

Zadatak 1. Naći sve vrijednosti $k \in \mathbb{R}^+$ za koje jednadžba

$$\frac{\log kx}{\log(x+1)} = 2$$

ima tačno jedno rješenje.

Rješenje: *D.P.*

$(kx > 0,\ x+1 \neq 0,\ x+1 > 0) \Leftrightarrow k > 0,\ x > 0,\ x > -1,$ tj. $k > 0, x > 0$

Sada imamo

$$\frac{\log kx}{\log(x+1)} = 2 \Leftrightarrow \log kx = 2 \cdot \log(x+1) \Leftrightarrow \log kx = \log(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow kx = (x+1)^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^2 + (2-k)x + 1 = 0$$

Dobivena jednačina ima jedinstveno rješenje akko je $D = 0$ tj.

$$(2-k)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow k \cdot (k-4) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = 4$$

$k = 0$ otpada zbog *D.P.* a za $k = 4$ provjerom imamo

$$\log 4x = \log(x+1)^2 \Leftrightarrow 4x = (x+1)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$$

tj. $x = 1$ je jedinstveno rješenje.
Dakle jedino za $k = 4$ data jednačina ima jedinstveno rješenje.

Zadatak 2. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi čija je suma jednaka 3. Dokazati da je $3a + bc = (a+b)(a+c)$ i da vrijedi nejednakost

$$\frac{a+3}{3a+bc} + \frac{b+3}{3b+ca} + \frac{c+3}{3c+ab} \geq 3.$$

Rješenje: Koristeći uslov $a+b+c=3$ imamo

$$3a+bc=(a+b+c)\cdot a+bc=(a+b)(a+c)$$

Dalje imamo

$$\frac{a+3}{3a+bc}=\frac{a+a+b+c}{(a+b)(a+c)}=\frac{(a+b)+(a+c)}{(a+b)(a+c)}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}$$

Analogno je i

$$\frac{b+3}{3b+ca}=\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+a}$$

$$\frac{c+3}{3c+ab}=\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c+b}$$

pa je stoga data nejednakost ekvivalentna sa

$$2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq 3$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{3}{2}$$

Posljednju nejednakost možemo dokazati na više načina.

Prvi način Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine imamo

$$\frac{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{\frac{1}{a+b}}+\frac{1}{\frac{1}{b+c}}+\frac{1}{\frac{1}{c+a}}}=\frac{3}{2(a+b+c)}=\frac{3}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}$$

pa odavdje imamo

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{3}{2}$$

Drugi način: Na osnovu $Koši-\check{S}varcove$ nejednakosti imamo

$$\left(\sqrt{\frac{1}{a+b}}^2+\sqrt{\frac{1}{b+c}}^2+\sqrt{\frac{1}{c+a}}^2\right)\left(\sqrt{a+b}^2+\sqrt{b+c}^2+\sqrt{c+a}^2\right)\geq$$

$$(1+1+1)^2=9$$

a odavdje neposredno slijedi gornja nejednakost.

Treći način: Zbog uslova $a+b+c=3$ gornja nejednakost je ekvivalentna sa

$$\frac{1}{3-a}+\frac{1}{3-b}+\frac{1}{3-c}\geq\frac{3}{2}$$

Neka je $f(x)=\frac{1}{3-x}=(3-x)^{-1}$. Kako je za $x\in(0,3)$

$$f''(x)=\frac{2}{(3-x)^3}>0$$

i kako $a,b,c\in(0,3)$ to na osnovu *Jensenove nejednakosti* (funkcija f je konveksna) imamo

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}\geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=f(1)=\frac{1}{2}$$

pa je

$$\frac{1}{3-a}+\frac{1}{3-b}+\frac{1}{3-c}=f(a)+f(b)+f(c)\geq\frac{3}{2}$$

Četvrti način: Dovoljno je dokazati da je

$$\frac{3}{a+b}+\frac{3}{b+c}+\frac{3}{c+a}\geq\frac{9}{2}$$

što je zbog uslova $a+b+c=3$ ekvivalentno sa

$$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}\geq\frac{9}{2}$$

a ovo je dalje ekvivalentno sa

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

a posljednja nejednakost je poznata *Nesbitova nejednakost*.
Znak jednakosti se dostiže ako i samo ako je $a=b=c=1$.

Zadatak 3. Dat je trougao ABC u kome je $\angle CAB=15^\circ$ i $\angle ABC=30^\circ$. Sa M označimo sredinu stranice AB.

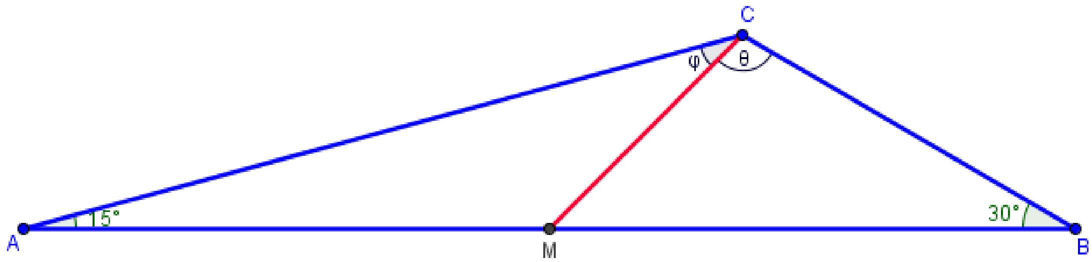
a) Dokazati da je $\angle ACM=30^\circ$.

b) Dokazati da je

$$CM=\frac{AB\cdot BC}{2AC}.$$

Rješenje: a) Neka je $\angle ACM = \varphi$ i $\angle BCM = \theta$. Tada je

$$\varphi + \theta = \angle ACB = 135^\circ$$



Primjenom sinusne teoreme na trouglove BMC i AMC i koristeći $MB = MA$ imamo

$$\frac{\sin 30^\circ}{\sin\theta} = \frac{CM}{MB} = \frac{CM}{MA} = \frac{\sin 15^\circ}{\sin\varphi}$$

odakle je

$$\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\sin(15^\circ + 15^\circ)}{\sin 15^\circ} = \frac{2\cdot\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = 2\cdot\cos 15^\circ$$

Također imamo

$$\sin\theta = \sin(135^\circ - \varphi) = \sin 135^\circ \cos\varphi - \cos 135^\circ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\varphi + \cos\varphi)$$

pa je

$$2\cos 15^\circ = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\varphi + \cos\varphi)}{\sin\varphi}$$

a iz posljednje jednakosti lagano nalazimo

$$\cot\varphi = 2\sqrt{2}\cos 15^\circ - 1$$

Izračunajmo sada $\cos 15^\circ$.
Imamo

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ = \cos(15^\circ + 15^\circ) = \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ =$$

$$\cos^2 15^\circ - \left(1 - \cos^2 15^\circ\right) = 2\cdot\cos^2 15^\circ - 1$$

pa je

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{8} = \frac{\left(1 + \sqrt{3}\right)^2}{8}$$

a kako je $\cos 15^\circ > 0$ to iz posljednje jednakosti imamo

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{8}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

pa je

$$\cot\varphi = 2\sqrt{2}\cos 15^\circ - 1 = 1 + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3}$$

a kako $\varphi \in (0, 135^\circ)$ to mora biti $\varphi = 30^\circ$.

b) Dovoljno je dokazati da je

$$\frac{CM}{BC} = \frac{AB}{2AC}$$

Ugao CMB je vanjski ugao trougla ACM i imamo

$$\angle CMB = \angle CAM + \angle ACM = 15^\circ + 30 = 45^\circ$$

pa primjenom sinusne teoreme na trougao CMB dobijamo

$$\frac{CM}{BC} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Primjenom sinusne teoreme na trougao ABC dobijamo

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin 135^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}$$

pa je

$$\frac{AB}{2AC} = \frac{\sin 45^\circ}{2\cdot\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{CM}{BC}$$

te je ovim dokaz završen.

Zadatak 4. Odrediti sve parove (m, n) prirodnih brojeva koji zadovoljavaju jednakost

$$2\cdot(n!) = m!\cdot(m!+2)$$

gdje $k!$ označava proizvod svih prirodnih brojeva od 1 do k.

Rješenje: Za $m = 1$ imamo $2\,(n!) = 3$ što očigledno nema rješenja budući da je lijeva strana paran a desna neparan prirodan broj.
Za $m = 2$ imamo $2 \cdot (n!) = 8$ odakle slijedi $n! = 4$ a ova jednačina također nema rješenja u skupu prirodnih brojeva (što se lagano provjerava).

Pretpostavimo sada da je $m \geq 3$.
Kako je $m! + 2 > 2$ to mora biti ispunjena nejednakost $n! > m!$ (u suprotnom je desna strana veća od lijeve) odakle slijedi da je $n > m$ pa postoji prirodan broj k takav da je $n = m + k$. Uvrštavajući $n = m + k$ u datu jednakost imamo

$$2 \cdot [(m+k)!] = m! \cdot (m! + 2)$$

što je nakon dijeljenja sa $m!$ ekvivalentno sa

$$2 \cdot (m+1) \cdot (m+2) \cdot \ldots \cdot (m+k) = m! + 2$$

Kako je $m \geq 3$ to je $m!$ djeljivo sa 3 odakle slijedi da desna strana posljednje jednakosti nije djeljiva sa 3 što dalje implicira $k \leq 2$. Naime, za $k > 2$ lijeva strana sadrži proizvod tri uzastopna prirodna broja $m + 1$, $m + 2$ i $m + 3$ od kojih je jedan sigurno djeljiv sa 3 pa je u tom slučaju i lijeva strana djeljiva sa 3 što zbog gore pomenutog nije slučaj.
Budući da je k prirodan broj razlikujemo dva slučaja.

Prvi slučaj $k = 1$

U ovom slučaju imamo jednakost

$$2 \cdot (m+1) = m! + 2$$

što je ekvivalentno sa

$$2m = m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (m-1) \cdot m$$

odakle nakon dijeljenja sa m imamo

$$2 = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (m-1)$$

Očigledno je jedino rješenje posljednje jednakosti $m = 3$ odakle zaključujemo da je $n = m + k = 3 + 1 = 4$ i par $(m, n) = (3, 4)$ je jedino rješenje date jednačine u ovom slučaju.

Drugi slučaj $k = 2$

U ovom slučaju imamo jednakost

$$2(m+1)(m+2) = m! + 2$$

što je ekvivalentno sa

$$2m^2 + 6m + 2 = m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$$

odakle dalje imamo

$$2 = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m - 2m^2 - 6m$$

Očigledno da m dijeli desnu stranu posljednje jednakosti što implicira $m \mid 2$ a ovadje slijedi $m \leq 2$ što je suprotno pretpostavci $m \geq 3$ pa u ovom slučaju nemamo rješenja.

Dakle, jedino rješenje date jednačine u skupu prirodnih brojeva je par $(m, n) = (3, 4)$.

ČETVRTI RAZRED

Zadatak 1. Četiri broja čine geometrijski niz. Njihovi logaritmi za bazu 3 čine aritmetički niz čija je razlika 1, a zbir 18. Odrediti te brojeve.

Rješenje: Neka su a, b, c, d traženi brojevi. Iz uslova zadatka slijedi

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c}$$

$$\log_3 a + \log_3 b + \log_3 c + \log_3 d = 18$$

Također imamo

$$\log_3 b = \log_3 a + 1$$

$$\log_3 c = \log_3 b + 1 = \log_3 a + 2$$

$$\log_3 d = \log_3 c + 1 = \log_3 a + 3$$

pa uvrštavajući ovo u jednakost

$$\log_3 a + \log_3 b + \log_3 c + \log_3 d = 18$$

imamo

$$4 \cdot \log_3 a + 1 + 2 + 3 = 18$$

odakle je $\log_3 a = 3 = \log_3 3^3$ pa je $a = 3^3 = 27$.
Sada dalje lagano nalazimo

$$\log_3 b = 3 + 1 = 4 = \log_3 3^4 \quad \Rightarrow \quad b = 3^4 = 81$$

$$\log_3 c = 4 + 1 = 5 = \log_3 3^5 \quad \Rightarrow \quad c = 3^5 = 243$$

$$\log_3 d = 5 + 1 = 6 = \log_3 3^6 \quad \Rightarrow \quad d = 3^6 = 729$$

te su stoga traženi brojevi $27, 81, 243, 729$.

Zadatak 2. U skupu realnih brojeva riješiti sistem jednačina

$$x + y^2 = y^3$$

$$y + x^2 = x^3$$

Rješenje: Oduzimanjem datih jednakosti imamo

$$x + y^2 - y - x^2 = y^3 - x^3$$

odakle slijedi

$$x^3 - y^3 + x - y + y^2 - x^2 = 0$$

što je ekvivalentno sa

$$(x - y)\left(x^2 + xy + y^2 + 1 - x - y\right) = 0$$

Imamo

$$x^2 + xy + y^2 + 1 - x - y = \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}(y - 1)^2 > 0$$

pri čemu u posljednjoj nejednakosti stroga nejednakost vrijedi zbog toga što ne može istovremeno biti $x - 1 = 0$, $y - 1 = 0$ i $x + y = 0$. Iz ovoga zaključujemo da mora biti $x - y = 0$ tj. $x = y$ pa uvrštavajući ovo u prvu jednakost sistema imamo

$$x + x^2 = x^3$$

što je ekvivalentno sa

$$x\left(x^2 - x - 1\right) = 0$$

a posljednja jednačina ima tri rješenja i to $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$ i $x_3 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right)$. Kako i druga jednačina sistema također (nakon uvrštavanja $y = x$) postaje $x + x^2 = x^3$ to je i ona zadovoljena za brojeve x_1, x_2, x_3. Dakle, sva rješenja datog sistema u skupu realnih brojeva su parovi

$$\left\{(0,0), \left(\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right), \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)\right), \left(\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right), \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right)\right)\right\}$$

Zadatak 3. Simetrala ugla kod vrha A trougla ABC siječe stranicu BC u tački D. Ukoliko je poznato da je $CD \cdot BD = AD^2$ i $\angle ADB = 45°$

$a)$ dokazati da je $\angle ABC - \angle ACB = 90°$.

$b)$ izračunati vrijednost ugla BAC.

Rješenje: Označimo uglove trougla ABC sa $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$ i $\angle ACB = \gamma$.

$a)$ Trebamo dokazati da je $\beta - \gamma = 90^\circ$. Iz trougla DBA imamo

$$45^\circ + \beta + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ$$

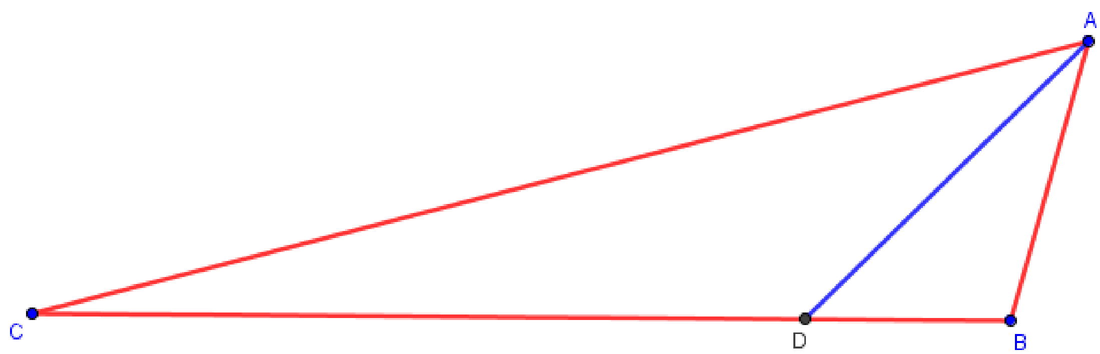
a kako je iz trougla ABC

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$$

to imamo

$$45^\circ + \beta + \frac{180^\circ - \beta - \gamma}{2} = 180^\circ$$

a iz posljednje jednakosti lagano nalazimo $\beta - \gamma = 90^\circ$.



$b)$ Primjenom sinusne teoreme na trouglove ADB i ACD dobijamo

$$\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{BD}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad \Rightarrow \quad AD = \frac{BD \cdot \sin\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{AD}{\sin\gamma} = \frac{CD}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad \Rightarrow \quad AD = \frac{CD \cdot \sin\gamma}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

pa je odavdje imamo

$$AD^2 = BD \cdot CD \cdot \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

što zajedno sa uslovom $AD^2 = BD \cdot CD$ implicira

$$\frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} = 1$$

što je ekvivalentno sa

$$\sin\beta \cdot \sin\gamma = \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

Kako je na osnovu adicionih formula

$$\sin\beta\cdot\sin\gamma=\frac{\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)}{2}$$

i

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2=\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos 0-\cos\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

to je jednakost $\sin\beta\cdot\sin\gamma=\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$ ekvivalentna sa

$$\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)=1-\cos\alpha$$

Kako su α,β i γ uglovi trougla to je $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ pa je

$$\cos(\beta+\gamma)=\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$$

pa tako dobijamo

$$\cos(\beta-\gamma)+\cos\alpha=1-\cos\alpha$$

odakle slijedi

$$2\cos\alpha=1-\cos(\beta-\gamma)=1-\cos 90^\circ=1 \quad\Rightarrow$$

$$2\cos\alpha=1\ \Rightarrow\ \alpha=60^\circ.$$

Zadatak 4. U skupu prostih brojeva riješiti jednačinu

$$xyz+1=2^{y^2+1}$$

Rješenje: Kako je desna strana paran broj to i $xyz+1$ mora biti paran pa su stoga x,y,z neparni. Stoga je $\gcd(y,2)=1$ pa na osnovu $Male\ Fermaove\ teoreme$ imamo

$$2^{y-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ y)$$

Iz date jednačine slijedi

$$2^{y^2+1}=xyz+1\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ y)$$

Također imamo

$$2^{y^2+1}=2^{y^2-1+2}=\left(2^{y-1}\right)^{y+1}\cdot 2^2\equiv 1^{y+1}\cdot 4\equiv 4\,(\mathrm{mod}\ y)$$

pa je

$$1 \equiv 2^{y^2+1} \equiv 4 \pmod{y}$$

tj. $y \mid 4-1$ pa mora biti $y=3$. Uvrštavajući $y=3$ u datu jednačinu imamo

$$3xz+1=2^{10}=1024$$

odakle slijedi $xz=341=11\cdot 31$ pa su jedina rješenja date jednačine u skupu prostih brojeva trojke $(11,3,31)$ i $(31,3,11)$.