Pedagoški zavod TK **Udruženje matematičara TK**

Općinsko takmičenje učenika osnovnih škola TK iz Matematike

Tuzla

28.2.2015. godine

BOSNA I HERCEGOVINA
FEDERACIJA BOSNE I HERCEGOVINE
TUZLANSKI KANTON
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLANSKOG KANTONA i
UDRUŽENJE MATEMATIČARA TK

Zadaci

za općinsko takmičenje učenika osnovnih škola TK iz matematike
28.2.2015. godine

VI razred

1. **Proizvod (produkt) četiri uzastopna parna prirodna broja je 13 440. Odredi te brojeve!**

2. **Od 70 učenika šestog razreda 27 su članovi dramske sekcije, 32 pjevaju u horu, a 22 se bavi sportom. U dramskoj sekciji ima 16 članova hora, a u horu pjeva 6 sportista, dok je 8 sportista u dramskoj sekciji. Tri učenika su članovi sve tri sekcije. Koliko učenika nije ni u jednoj sekciji, a koliko učenika se bavi samo sportom?**

3. **Odredi sve moguće cifre x i y pa da broj $\overline{x74y}$ bude djeljiv sa 15.**

4. **Mirela je zamislila jedan broj. Zatim je ovom broju dodala 6 pa dobijeni zbir pomnožila sa 5. Dobijeni proizvod je umanjila za 40 pa tu razliku podijelila sa 7. Dobila je broj 25. Koji je broj Mirela zamislila?**

5. **Uglovi α i β su suplementni, a uglovi β i γ komplementni. Odredi uglove α, β i γ ako je ugao α pet puta veći od:**

a) **ugla β;**
b) **ugla γ.**

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.

Izrada zadataka traje 120 minuta

Rješenja:

6. Razred:

1. 13440 = 2·2·2·2·2·2·2·3·5·7 ,
   2·2·2= 8 , 2·5=10 , 2·2·3=12 , 2·7=14 , pa je traženi proizvod <u>8·10·12·14</u> .

2. Koristeći Venov dijagram, ubacujući odgovarajuće vrijednosti u odgovarajuće presjeke (D∩H=16, D∩S=8, H∩S=6, D∩H∩S=3). (D- dramska sekcija, H-hor, S- Sportska sekcija.)Ukupan broj angažovanih učenika je 54, pa njih 16 (70-54) nije ni u jednoj sekciji. Samo sportom se bavi 11 učenika.

3. Da bi bio djeljiv sa 15 mora biti djeljiv sa 3 i 5. Cifra y može biti 0 ili 5. Ako je 0 onda je x = 1,4,7
   a to su brojevi 1740,4740,7740. Ako je y = 5 onda je x = 2,5,8 pa su to brojevi 2745,5745,8745

4. $[(x+6)\cdot 5-40]:7=25 \Leftrightarrow (x+6)\cdot 5-40=25\cdot 7 \Leftrightarrow (x+6)\cdot 5=175+40$
   $\Leftrightarrow x+6=215:5 \Leftrightarrow x+6=43 \Leftrightarrow \boldsymbol{x=37}$

5. a)

$$\alpha+\beta=180^\circ$$
$$\beta+\gamma=90^\circ$$
$$\alpha=5\cdot\beta$$

Iz prve i treće jednakosti dobijamo:

$$5\cdot\beta+\beta=180^\circ$$
$$6\cdot\beta=180^\circ$$
$$\beta=180^\circ:6 \Longrightarrow \boldsymbol{\beta=30^\circ}$$

$$\alpha=5\cdot\beta$$
$$\alpha=5\cdot 30^\circ$$
$$\boldsymbol{\alpha=150^\circ}$$

$$\beta+\gamma=90^\circ$$
$$30^\circ+\gamma=90^\circ$$
$$\gamma=90^\circ-30^\circ$$
$$\boldsymbol{\gamma=60^\circ}$$

b)

$$\alpha+\beta=180^\circ$$
$$\beta+\gamma=90^\circ$$
$$\alpha=5\cdot\gamma$$

Iz prve i treće jednakosti dobijamo: $5\cdot\gamma+\beta=180^\circ$
Iz druge jednakosti imamo: $\beta+\gamma=90^\circ \Longrightarrow \beta=90^\circ-\gamma$

$$5\cdot\gamma+90^\circ-\gamma=180^\circ$$
$$4\cdot\gamma=180^\circ-90^\circ$$
$$4\cdot\gamma=90^\circ$$
$$\gamma=90^\circ:4 \Longrightarrow$$
$$\boldsymbol{\gamma=22^\circ\,30'}$$

BOSNA I HERCEGOVINA
FEDERACIJA BOSNE I HERCEGOVINE
TUZLANSKI KANTON
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLANSKOG KANTONA i
UDRUŽENJE MATEMATIČARA TK

Zadaci

za općinsko takmičenje učenika osnovnih škola TK iz matematike
28.02.2015. godine

VII razred

1. **Jedan radnik završio bi neki posao za 12 dana, drugi za 15, a treći za 20 dana. Koliko dana treba da rade zajedno da bi posao bio završen?**

2. **Dužine dviju stranica trougla izražene u cm su rješenja jednačina:**
$$0,3-\frac{2}{a}=0$$
$$2\frac{2}{3}:\left[b-\frac{3}{5}\left(\frac{2,5-7:3,5}{8\cdot 0,125}-1,5\right)\right]=\frac{2}{3}$$
Kolika može da bude dužina treće stranice, ako je ona prirodan broj?

3. **Odredi sve racionalne brojeve koji zadovoljavaju nejednačinu** $\frac{3a-2}{a+1}<0.$

4. **Odrediti vrijednost algebarskog izraza** A$=\frac{a^2-2a}{a^2-4a+2}$ **ako je** a **rješenje jednačine**
$$3a+1-[5a-(4a-10)]+5=a-1.$$

5. **Nad stranicom** AB **kvadrata** $ABCD$ **konstruisan je jednakostranični trougao** ΔABE **pri čemu je tačka** E **u unutrašnjosti kvadrata. Izračunaj ugao** $\measuredangle DEC$**.**

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.

Izrada zadataka traje 120 minuta.

Rješenja:

1. Kada bi sva tri radnika radila zajedno posao bi bio završen za **5 dana**.
2.

$0{,}3-\frac{2}{a}=0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{3}}=\mathbf{6}\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ **cm**

$2\frac{2}{3}:\left[b-\frac{3}{5}\left(\frac{2{,}5-7:3{,}5}{8\cdot 0{,}125}-1{,}5\right)\right]=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \boldsymbol{b}=\mathbf{3}\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$**cm**

$a-b<c<a+b \Rightarrow$ c $\in[\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6},\mathbf{7},\mathbf{8},\mathbf{9},\mathbf{10}]$

3. Svodi se na dva slučaja

$1^{o}\quad a+1>0 \quad => \quad a>-1$

$\frac{3a-2}{a+1}<0 \quad /\cdot(a+1)$

$3a-2<0$

$a<\frac{2}{3}$

$2^{o}\quad a+1<0 \quad => \quad a<-1$

$\frac{3a-2}{a+1}<0 \quad /\cdot(a+1)$

$3a-2>0$

$a>\frac{2}{3} \quad \textit{što je nemoguće jer } a<-1$

Rješenje je $-\mathbf{1}<\mathbf{a}<\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

4. Rješenje:

I: Riješimo jednačinu:

$$3a+1-[5a-4a+10]+5=a-1$$
$$3a+1-[a+10]+5=a-1$$
$$3a+1-a-10+5=a-1$$
$$2a-4=a-1$$
$$2a-a=-1+4$$
$$\boldsymbol{a}=\mathbf{3}$$

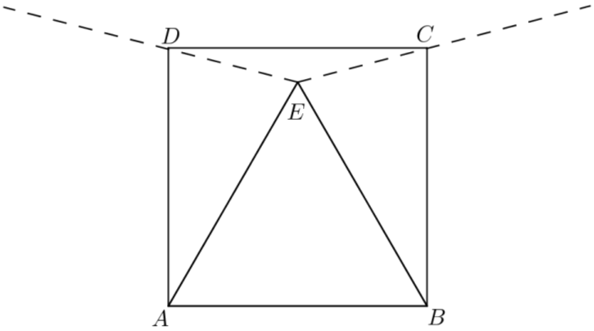
II: Odredimo vrijednost izraza:

$$A=\frac{a^2-2a}{a^2-4a+2}$$
$$A=\frac{3^2-2\cdot 3}{3^2-4\cdot 3+2}$$
$$A=\frac{9-6}{9-12+2}$$
$$A=\frac{3}{-3+2}$$
$$A=\frac{3}{-1}$$
$$\boldsymbol{A}=-\mathbf{3}$$

5.

Vrijedi: $\overline{AE} = \overline{AD}$ pa je trougao ΔAED jednakokraki.

Vrijedi: $\overline{BE} = \overline{BC}$ pa je trougao ΔBEC jednakokraki.



$$\left.\begin{array}{r}\measuredangle AED \cong \measuredangle BEC \\ ED \cong EC \\ \measuredangle ADE \cong \measuredangle BCE\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta AED \cong \Delta BCE$$

$\measuredangle EAD = 90° - \measuredangle BAE = 90° - 60° \Longrightarrow \boldsymbol{\measuredangle EAD = 30}°$

ΔAED jednakokraki tj. $\measuredangle AED = \measuredangle EDA$ pa imamo:

$\measuredangle AED + \measuredangle EDA + \measuredangle EAD = 180°$

$2\measuredangle AED + 30° = 180°$

$2\measuredangle AED = 180° - 30°$

$2\measuredangle AED = 150°$

$\measuredangle AED = 150°: 2 \Longrightarrow \boldsymbol{\measuredangle AED = 75}°$

Sada imamo: $\measuredangle EDA = 90° - \measuredangle EDA = 90° - 75° \Longrightarrow \boldsymbol{\measuredangle EDA = 15°}$.

Kako vrijedi $\Delta AED \cong \Delta BCE$ to vrijedi i $\measuredangle EDA = \measuredangle ECA$ tj. $\boldsymbol{\measuredangle ECA = 15°}$

Imamo da vrijedi da je $\measuredangle EDA = \measuredangle ECA$ pa je trougao ΔCDE jednakokraki pa imamo:

$\measuredangle EDA + \measuredangle ECA + \measuredangle DEC = 180°$

$15° + 15° + \measuredangle DEC = 180°$

$DEC = 180° - 30° \Longrightarrow \boldsymbol{\measuredangle DEC = 150°}$

BOSNA I HERCEGOVINA
FEDERACIJA BOSNE I HERCEGOVINE
TUZLANSKI KANTON
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLANSKOG KANTONA i
UDRUŽENJE MATEMATIČARA TK

Zadaci

za općinsko takmičenje učenika osnovnih škola TK iz matematike
28.02.2015. godine

VIII razred

1. Bez upotrebe kalkulatora izračunaj:

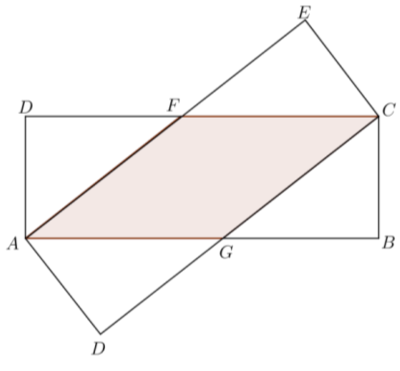
$$\sqrt{666^2 + 888^2} = ?$$

2. Dokaži da je broj $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ prirodan.

3. Ako se brojnik nekog razlomka poveća za 5%, a nazivnik poveća za 20%, hoće li se vrijednost razlomka povećati ili smanjiti i za koliki procenat?

4. Za vrijeme boravka u Zemlji čuda Alisa je 4 puta mijenjala veličinu. Prvo je popila gutljaj iz bočice sa natpisom „Popij me“ i povećala se za 25% svoje veličine. Zatim, je uzela zalogaj pite sa natpisom „Pojedi me“ i smanjila se za 10%, popila je gutljaj iz bočice „Popij me“ i povećala se za 10% i na kraju pojela zalogaj pite sa natpisom „Pojedi me“ i smanjila se za 20%. Da li je ona poslije toga bila veća ili manja nego u početku?

5. Dva podudarna pravougaonika koji se preklapaju kao na slici imaju stranice dužine $5cm$ i $12cm$. Izračunati površinu osjenčenog dijela.



Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.

Izrada zadataka traje 120 minuta.

Rješenja:

1.

$$\sqrt{666^2+888^2}=\sqrt{(6\cdot 111)^2+(8\cdot 111)^2}=\sqrt{111^2\cdot(6^2+8^2)}=\sqrt{111^2\cdot 10^2}=$$

$$\sqrt{111^2}\cdot\sqrt{10^2}=111\cdot 10=1110$$

2.

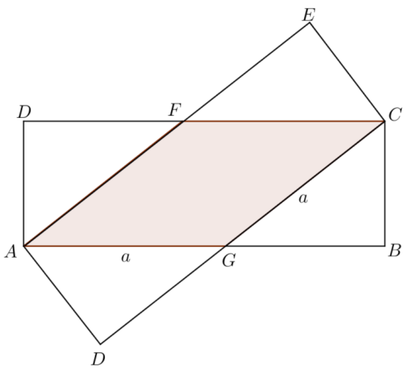
$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$$

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=2-\sqrt{3}$$

Dakle, sabiranjem izraza se dobije rješenje 4, što je trebalo i dokazati.

3. Nakon povećanja brojnika i nazivnika razlomak $\frac{a}{b}$ postaje $\frac{1{,}05a}{1{,}20b}=\frac{105a}{120b}=\frac{7}{8}\cdot\frac{a}{b}$.
   Dakle, razlomak se smanjio 12,5%.

4. Neka je visina Alise A. Kada je popila gutljaj porasla je do visine 1,25A, nakon smanjenja od 10% njena visina je iznosila $0{,}9\cdot 1{,}25A=1{,}125A$. Zatim je porasla za još 10% pa je porasla do visine $1{,}125A\cdot 1{,}1=1{,}2375A$. Na kraju se smanjila za 20%, pa je njena visina iznosila: $1{,}2375A\cdot 0{,}8=0{,}99A$. Dakle, na kraju je Alisa bila niža za 1%.
5. Osjenčeni dio je romb čija je visina jednaka kraćoj stranici pravougonika.



$$\overline{GB}=\overline{AB}-a$$
$$\overline{GB}=12-a$$

Primjenimo Pitagorinu teoremu na trougao ΔBCG:

$$a^2=(12-a)^2+\overline{BC}^2$$
$$a^2=144-24a+a^2+5^2$$
$$a^2-a^2+24a=144+25$$
$$24a=169\ \Rightarrow \boldsymbol{a}=\frac{\mathbf{169}}{\mathbf{24}}\boldsymbol{cm}$$

$$P_{romba}=a\cdot h\Leftrightarrow P_{romba}=\frac{169}{24}\cdot 5\Leftrightarrow \boldsymbol{P_{romba}}=\frac{\mathbf{845}}{\mathbf{24}}\boldsymbol{cm^2}$$

BOSNA I HERCEGOVINA
FEDERACIJA BOSNE I HERCEGOVINE
TUZLANSKI KANTON
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLANSKOG KANTONA i
UDRUŽENJE MATEMATIČARA TK

Zadaci

za općinsko takmičenje učenika osnovnih škola TK iz matematike
28.02.2015. godine

IX razred

1. **Da li je broj $\sqrt{0,1^{\cdot}}$ racionalan ili iracionalan?**
2. **Odredi brojeve x, y i z za koje vrijede jednakosti**

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2013$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2014$$
$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=2015$$

3. **Odredi za koje vrijednosti parametra *a* i *b* je sistem jednačina**

$$(a-1)x+by=1$$

$$ax+2by=b$$

neodređen.

4. **Dva kruga sijeku se tako da je $\frac{6}{7}$ većeg kruga izvan presjeka, a $\frac{3}{4}$ manjeg kruga izvan presjeka. Ako je poluprečnik većeg kruga $7cm$ izračunaj površinu manjeg kruga.**

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.

Izrada zadataka traje 120 minuta

Rješenja:

2. $(0,1^{\cdot}=0,111111...)$

$0,1^{\cdot}=x\ /\cdot 10$

$1,1^{\cdot}=10x \Rightarrow 1+0,1^{\cdot}=10x$

$1+x=10x$

$1=9x \Rightarrow x=\frac{1}{9}$

Kako je $\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3} \Rightarrow$ broj $\sqrt{0,1^{\cdot}}$ je racionalan

3.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2013 \Rightarrow \frac{1}{y}=2013-\frac{1}{x}\ (1)$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2014\ \ (2)$$
$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=2015 \Rightarrow \frac{1}{z}=2015-\frac{1}{x}\ \ (3)$$

Iz (1) i (2) slijedi

$$2013-\frac{1}{x}+2015-\frac{1}{x}=2014$$
$$-\frac{2}{x}=2014-2013-2015$$
$$-\frac{2}{x}=-2014$$
$$\frac{1}{x}=1007 \Rightarrow \boldsymbol{x}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1007}}$$

Dalje uvrštavajući x u (2) i (3) dobijamo $\boldsymbol{y}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1006}}$ i $\boldsymbol{z}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1008}}$

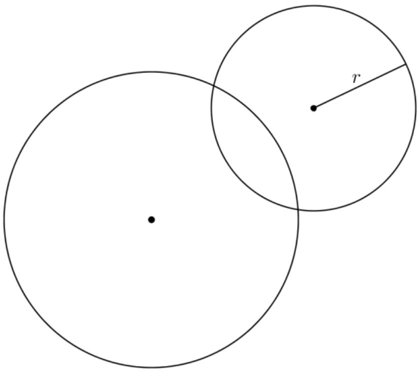
4. Odrediti koeficijente: $a_1=a-1;\ \ b_1=b;\ \ c_1=1;\quad a_2=a;\ \ b_2=2b;\ \ c_2=b$

Postaviti uslov da sistem jednačina bude neodređen:

$$\frac{a-1}{a}=\frac{b}{2b}=\frac{1}{b}$$

Riješiti uslov: **b=2; a=2**

5.



Vrijedi da je $\frac{1}{7}$ površine većeg kruga jednaka je $\frac{1}{4}$ površine manjeg kruga, pa imamo:

$$\frac{1}{7} \cdot 7^2\pi = \frac{1}{4}r^2\pi$$
$$7\pi = \frac{1}{4}r^2\pi / \cdot 4$$
$$r^2 = 28$$
$$r = \sqrt{28} \Longrightarrow \boldsymbol{r = 2\sqrt{7}cm}$$

Dakle, površina manjeg kruga je:

$$P = r^2\pi$$
$$P = \left(2\sqrt{7}\right)^2\pi$$
$$\boldsymbol{P = 28\pi cm^2}$$