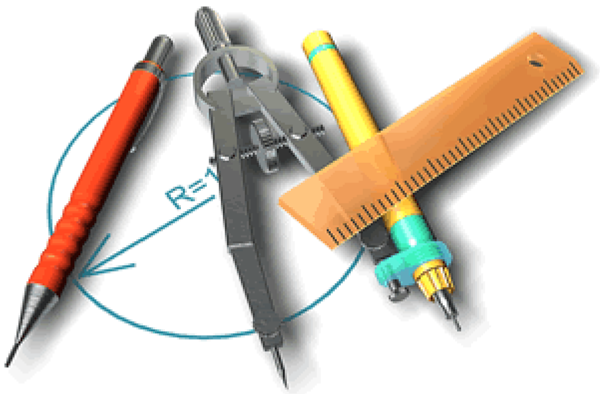
Pedagoški zavod TK **Udruženje matematičara TK**

Kantonalno takmičenje učenika osnovnih škola TK iz Matematike



Tuzla/Solina

28.03.2015. godine

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLANSKOG KANTONA
I
UDRUŽENJE MATEMATIČARA TK

Takmičenje učenika osnovnih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE

Tuzla/ Solina, 28.03.2015. godine

VI razred

1. Šta je veće: $\frac{1}{5}$ ili $\frac{403}{2016}$?

2. Dati su skupovi brojeva: A= $\{1,8,9,10\}$, $B = \{x\,/x - 3 \in A\}, C = \{x\,/x + 2 \in B\}$
   Odrediti skupove: $A \cap B, (C\backslash A) \cup (A\backslash C)$, pa dokazati da vrijedi jednakost: $(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(A \cap C)$.

3. Ako broj 860 podijelimo jednim brojem, dobićemo ostatak 9. Ako 1200 podijelimo tim istim brojem, dobićemo ostatak 16. Koliki je količnik u prvom, a koliki u drugom slučaju?

4. Data je prava p i tačke M i N, koje pripadaju pravoj p i tačka K, koja ne pripada pravoj p. Konstruiši kružnicu koja sadrži date tačke M, N i K.

5. Odredi sve četverocifrene brojeve manje od 2000, takve da im je proizvod cifara 105.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.

Izrada zadataka traje 120 minuta.

Rješenja

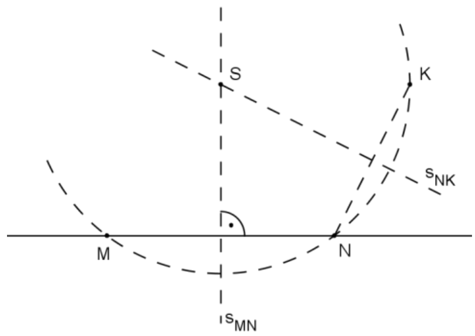
VI razred

1. Šta je veće: $\frac{1}{5}$ ili $\frac{403}{2016}$?
   $\frac{1}{5} = \frac{403}{5\cdot 403} = \frac{403}{2015} > \frac{403}{2016}$ Dakle, $\frac{1}{5} > \frac{403}{2016}$.

2. A= $\{1,8,9,10\}$, $B = \{4,11,12,13\}, C = \{2,9,10,11\}$
   $A \cap B = \varnothing,\quad (C\backslash A) \cup (A\backslash C) = \{1,2,8,11\}$
   $(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(A \cap C) \Leftrightarrow \{1,8,9,10\}\backslash C = A \Leftrightarrow \{1,8\} = \{1,8\}$.

3. Brojevi 860-9=851 i 1200-16=1184 imaju najveći zajednicčki djelitelj 37.
   Dakle, količnici su: 851 : 37 =23 i 1184 : 37 = 32.

4. Neka je S centar tražene kružnice.



   Tada je $\overline{SM} = \overline{SN}$=$\overline{SK}$. Dakle, tačka S je jednako udaljena od sve tri tačke, pa je S presjek simetrala duži $\overline{MN}, \overline{NK}$ i $\overline{KN}$. Dovoljno je uzeti dvije simetrale.

5. Kako je 105 = 3·5·7, to će cifre četvreocifrenih brojeva čiji je proizvod cifara 105 biti 1, 3, 5, 7.Traženi brojevi su: 1357, 1375, 1537, 1573, 1735 i 1753.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLANSKOG KANTONA
I
UDRUŽENJE MATEMATIČARA TK

Takmičenje učenika osnovnih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE

Tuzla/ Solina, 28.03.2015. godine

VII razred

1. Riješiti jednačinu: $0{,}4 \cdot \left(\frac{2}{3}x - 1\right) + \frac{3}{5} = \left(-2\frac{1}{4}\right) : 0{,}9$

2. Odredi sve cijele brojeve za koje je $|x - 4| \leq 3$, a zatim naći razliku dobivenog rješenja i skupa A= $\{x|x \in N \wedge 5 < x < 10\}$

3. Dokazati da u trouglu ΔABC, čije su stranice a, b i c vrijedi nejednakost: $\frac{a+b-c}{2} < t_c < \frac{a+b}{2}$.

4. Dat je konveksan četverougao ABCD. Neka je tačka M središte stranice AB, a tačka N središte stranice CD.

   a) dokazati da je $\overline{AD} + \overline{BC} \geq 2 \cdot \overline{MN}$
   b) Kakav je četverougao ABCD, ako važi jednakost?

5. Dokazati da je:

$$\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \cdots + \frac{1}{2014 \cdot 2016} < \frac{1}{4}$$

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.

Izrada zadataka traje 120 minuta.

Rješenja

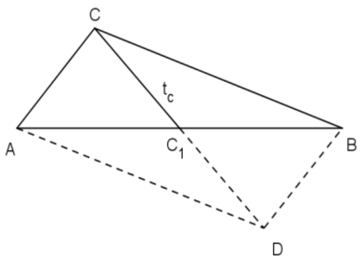
VII razred

1. $0{,}4\cdot\left(\frac{2}{3}x-1\right)+\frac{3}{5}=\left(-2\frac{1}{4}\right):0{,}9 \Leftrightarrow \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}x-1\right)+\frac{3}{5}=\left(-\frac{9}{4}\right):\frac{9}{10}$, ...x= $-\frac{81}{8}$

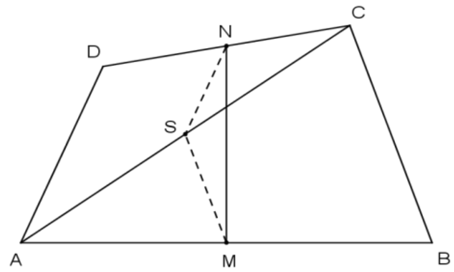
2. $Iz\ |x-4|\leq 3$ imamo da je -3 ≤ x-4 ≤ 3 ⇔ -3 +4≤ x ≤ 3+4 ⇔ 1 ≤ x ≤7. Dakle, $x\ \in\{1,2,3,4,5,6,7\}$. $Kako\ je$ A= $\{x|x\in N\wedge 5<x<10\}$= {6,7,8,9}, tada je $\{1,2,3,4,5,6,7\}\backslash\{6,7,8,9\}=\{1,2,3,4,5\}$

3. Neka je C_1 središte stranice AB trougla ΔABC. Ako produžimo stranicu CC_1 tako da su dužine CC_1 i C_1D jednake, dobijamo paralelogram ADBC.

Sada za dužine stranica vrijedi:
CD<DA+AC, odnosno, $2t_c<a+b \Leftrightarrow t_c<\frac{a+b}{2}$
(1)
S druge strane, je iz trokuta A C_1C i C_1BC vrijedi $t_c>b-\frac{c}{2}$ i $t_c>a-\frac{c}{2}$
Sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo: $t_c>\frac{a+b-c}{2}$ (2)
Iz (1) i (2) dobijamo traženu nejednakost: $\frac{a+b-c}{2}<t_c<\frac{a+b}{2}$.



4. Neka je S središte dijagonale AC. Tada je MS srednja linija troula ABC, a NS srednja linija trokuta ADC, pa je
5. $\overline{BC}=2\cdot\overline{MS}$ i $\overline{AD}=2\cdot\overline{NS}$. Sabiranjem nejednakosti dobijamo da je $\overline{\boldsymbol{AD}}+\overline{\boldsymbol{BC}}=2\cdot\overline{MS}+2\cdot\overline{NS}=2\cdot(\overline{MS}+\overline{NS})\geq\ \mathbf{2}\cdot\overline{\boldsymbol{MN}}$.



Ako važi jednakost $\overline{AD}+\overline{BC}=2\cdot\ \overline{MN}$, to znači dasu tačke M, S, N kolinearne, tj. vrijedi da je AD || MN || BC a to je u slučaju kad je MN srednja linija **trapeza**.

5. $\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\cdots+\frac{1}{2014\cdot2016}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{2\cdot4}+\frac{2}{4\cdot6}+\frac{2}{6\cdot8}+\cdots+\frac{2}{2014\cdot2016}\right)=$

$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4-2}{2\cdot4}+\frac{6-4}{4\cdot6}+\frac{8-6}{6\cdot8}+\cdots+\frac{2016-2014}{2014\cdot2016}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2016}\right)=$

$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2016}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4032}<\frac{1}{4}$, što je i trebalo pokazati.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLANSKOG KANTONA
I
UDRUŽENJE MATEMATIČARA TK

Takmičenje učenika osnovnih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE

Tuzla/ Solina, 28.03.2015. godine

VIII razred

1. Dokazati da: $27a^3 - (3a-2)(9a^2+6a+4)$ ne zavisi od a.

2. Dokazati da je broj $\overline{abcabc}$ gdje su $a, b, c \in \{0,1,2, \dots ,9\}$ i $a \neq 0$, djeljiv sa 7, 11 i 13.

3. Ako je a=4 i b=-0,25, izračunaj $a^{2012} \cdot b^{2014}$.

4. Jednakokraki trougao ima krak dužine 8 cm, a ugao između krakova je 135°. Izračunati površinu trokuta.

5. Svježe gljive sadrže 95% vode, a osušene 14%. Koliko je svježih gljiva potrebno nabrati da bismo dobili 50 kg suhih?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.

Izrada zadataka traje 120 minuta.

Rješenja

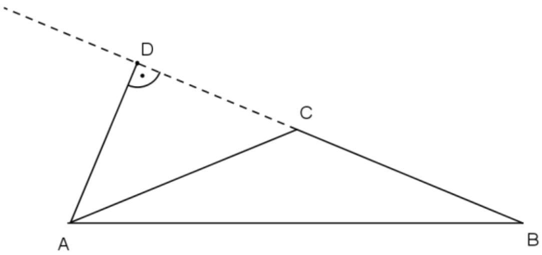
VIII razred

1. $27a^3 - (3a-2)(9a^2+6a+4) = 27a^3 - (27a^3 - 18a^2 + 12a - 8a^2 - 12a - 8) = 8$

2. $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc} = 1001\overline{abc}$. Kako je 1001 = 7·11·13, to je je $\overline{abcabc}$ djeljivo sa 7, 11 i 13.

3. Ako je a=4 i b=-0,25, onda je
$$a^{2012} \cdot b^{2014} = 4^{2012} \cdot (-\frac{1}{4})^{2014} = 4^{2012} \cdot \frac{1}{4^{2014}} = \frac{4^{2012}}{4^{2014}} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}.$$

4. Neka je $\overline{AB}$ osnovica, a $\overline{AD}$ visina trokuta iz vrha A na BC. Imamo da je $P = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}{2}$.
Pošto je $<(ACB)$=135°, to je $<(ACD)$=45°, pa je i $<(CAD)$=45°, jer je $<(ADC)$=90°



Dakle, ΔADC je jednakokraki, tj . $\overline{AD} = \overline{DC}$, pa je $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 = 2 \cdot \overline{AD}^2 = 8^2 = 64$.
Odavde je $\overline{AD}^2$=32⇔$\overline{AD} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Na kraju, $P = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}{2} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 16 \cdot \sqrt{2}\, cm^2$.

5. Svježe gljive sadrže 95% vode i 5% suhe materije, a suhe 14% vode i 86% suhe materije. U 50 kg osušenih gljiva ima: $50 \cdot \frac{86}{100} = 43$ kg suhe materije. Dakle, i svježe gljive treba da sadrže 43 kg suhe materije. Ako je količina svježih gljiva x, onda je $\frac{5}{100}x = 43$, pa je x=860 kg.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLANSKOG KANTONA
I
UDRUŽENJE MATEMATIČARA TK

Takmičenje učenika osnovnih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE

Tuzla/ Solina, 28.03.2015. godine

IX razred

1. Skratiti razlomak: $\frac{a^3-a^2x-ax^2+x^3}{a^3+a^2x-ax^2-x^3}$.

2. Ako se dužina kvadra poveća za $\frac{1}{3}$, širina poveća za 25%, a visina smanji za 15%, kako se mijenja zapremina?

3. Odredi najveći prirodni broj n za koji je vrijednost izraza $\frac{\sqrt{666}+\sqrt{n}}{\sqrt{666}-\sqrt{n}}$. prirodan broj.

4. Data je funkcija $y = (2m+1)x+6$.
   a) Odredi vrijednost parametra m tako da njen grafik sadrži tačku M(4,3).
   b) Za tu vrijednost broja m, izračunajte udaljenost koordinatnog početka od grafika te funkcije?

5. Iz tačke A, koja je 120 m udaljena od podnožja vertikalnog tornja BC, vrh C se vidi pod uglom α. Iz tačke D, koja je za 90 m bliža podnožju tornja B, vrh tornja C se vidi pod uglom $90^o - \alpha$. Kolika je visina tornja?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.

Izrada zadataka traje 120 minuta.

Rješenja

IX razred

1. $\frac{a^3-a^2x-ax^2+x^3}{a^3+a^2x-ax^2-x^3}=\frac{a^3+x^3-(a^2x+ax^2)}{a^3-x^3+(a^2x-ax^2)}=\frac{(a+x)(a^2-ax+x^2)-ax(a+x)}{(a-x)(a^2+ax+x^2)+ax(a-x)}=\frac{(a+x)(a^2-ax+x^2-ax)}{(a-x)(a^2+ax+x^2+ax)}=$
$=\frac{(a+x)(a^2-2ax+x^2)}{(a-x)(a^2+2ax+x^2)}=\frac{(a+x)(a-x)^2}{=(a-x)(a+x)^2}=\frac{a-x}{a+x}$.

2. Neka su a, b i c stranice kvadra. Ako se dužina kvadra poveća za $\frac{1}{3}$, širina poveća za 25%, a visina smanji za 15%, to znači da novi kvadar ima dimenzije: $\frac{4}{3}a$, 1,25 b i 0,85 c. Zapremina prvobitnog kvadra je $V=abc$. Novi kvadar ima zapreminu: V_n= $\frac{4}{3}a\cdot$ 1,25 b ·0,85 c = $\frac{17}{12}$abc= $\frac{17}{12}$V.
Dakle, V_n= $\frac{17}{12}$V.

3. $\frac{\sqrt{666}+\sqrt{n}}{\sqrt{666}-\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{\frac{666}{n}}+1}{\sqrt{\frac{666}{n}}-1}=\frac{k+1}{k-1}$, gdje je $k=\sqrt{\frac{666}{n}}$. Kako je $\frac{k+1}{k-1}=\frac{k-1+2}{k-1}=1+\frac{2}{k-1}$

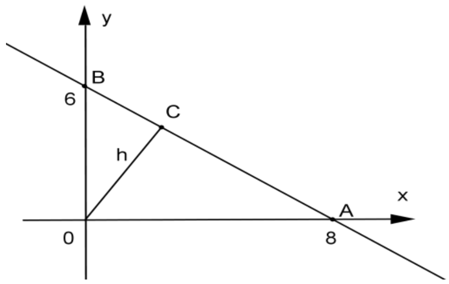
iz uslova zadatka slijedi da je $k-1\in\{1{,}2\}$, tj. $k\in\{2{,}3\}$.

Za k=2 imamo da je $\sqrt{\frac{666}{n}}=2\Leftrightarrow n=\frac{666}{4}=\frac{333}{2}$ nije prirodan broj.

Za k=3 imamo da je $\sqrt{\frac{666}{n}}=3\Leftrightarrow n=\frac{666}{9}=74\ \in N$. Dakle, jedina mogućnost je n=74.

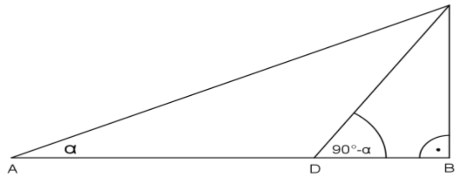
4. a) Ako je data funkcija $y=(2m+1)x+6$ i tačka M(4,3) koja se sadrži na njenom grafiku, to znači da je: 3=(2m+1)·4 + 6, tj. m=-$\frac{7}{8}$, dakle radi se o funkciji y = -$\frac{3}{4}x+6$, za y=0 je x=8.

b) $Jasno\ je\ da\ je\ P=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{OC}}{2}$ (1). Sa druge strane je $P=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{2}=\frac{8\cdot 6}{2}=24$. Kako je $\overline{AB}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2}$=$\sqrt{64+36}$= .... 10, onda je zbog (1) 24=$\frac{10\cdot h}{2}$ ili 10h=48, tj h=4,8.



Dakle, data prava je udaljena od koordinatnog potetka za d=4,8 mjernih jedinica.

5. Trouglovi $\Delta ABC\ i\ \Delta ACBD$ su slični, jer su oba pravougla i imaju jednak oštri ugao α. Iz sličnosti vrijedi: $\overline{AB}$: $\overline{BC}$=$\overline{BC}$: $\overline{BD}$ ⇔
⇔120:x=x:30, za $\overline{AB}$ =x.
Na dalje je x^2=30·120=3600. Odavde je: x= 60 m.



Dakle, visina tornja je 60 m.