

20. federalno takmičenje iz matematike za učenike osnovnih škola

BOSANSKA KRUPA, 23. MAJ 2015.



**UDRUŽENJE MATEMATIČARA
UNSKO – SANSKOG KANTONA**



Bosanska Krupa

Bosanska Krupa je grad i središte istoimene općine u sjeverozapadnom dijelu Bosne i Hercegovine. Smještena je u dolinama rijeka Une i Krušnice. Najveći dio grada razvio se na niskom prevoju između brda Huma i Starog grada na nadmorskoj visini od 176m u proširenom dijelu rijeke Une. Općina Bosanska Krupa graniči s općinama: Bihać, Cazin, Bužim, Bosanski Petrovac, Sanski Most, Bosanski Novi i Krupa na Uni, te Dvor u Republici Hrvatskoj. Rijeka Una, jedna od najljepših rijeka u Bosni i Hercegovini, prolazi kroz centar Bosanske Krupe. Putnim komunikacijama grad je povezan sa Zapadnom i Južnom Evropom. Općina pripada Unsko-sanskom kantonu Federacije Bosne i Hercegovine.

Područje današnje krupske općine bilo je naseljeno još u prehistojsko doba. Na to podsjećaju lokaliteti zvani Gradine, a kao sigurni dokazi služe materijalni ostaci iz tog vremena. Područje Bosanske Krupe i okoline bilo je periferna teritorija keltsko – ilirskog plemena Japoda. U srednjem vijeku područje današnje bosanskokrupske općine pripadalo je od desetog vijeka župi zvanoj Pset.

Neki historičari smatraju da je današnja Bosanska Krupa u prvo vrijeme nosila ime Pset. U 13. vijeku gubi se ime Pset i prvi put se javlja ime Krupa. U 14. i 15. vijeku krupsko područje bilo je relativno gusto naseljeno.



Od posebnog značaja bile su srednjovjekovne tvrđave koje su služile u ratne svrhe. Za tvrđavu u Bosanskoj Krupi, čiji se ostaci nalaze na brežuljku zvanom Grad, zna se da je postojala u 13. vijeku, ali se ne zna ko je bio njen graditelj. Po legendi ovu tvrđavu ozidala je djevojka Krupana.

Prvi poznati gospodari Krupe i krupske tvrđave bili su već u 13. vijeku feudalci Babonići. Srednjovjekovna Krupa bila je najvažnije mjesto u srednjem Pounju.

U ovom prelijepom krajiškom gradiću smjestila se i JU „Druga osnovna škola“, škola domaćin 20. federalnog takmičenja iz matematike za učenike osnovnih škola.

Dobrodošli u našu školu!



prelijepom prirodnom ambijentu, na ušću Krušnice u Unu, okružena je velikim parkom, što otvara mogućnosti iskoristivosti ovog prirodnog resursa za različite namjene.

Zgrada Centralne škole u Bosanskoj Krupi raspolaže s 20 učionica, salom za tjelesni i zdravstveni odgoj, 8 kabinetom, zbornicom, bibliotekom, kabinetom pedagoga, kabinetom direktora, sekretarijatom, prostorijom za individualne razgovore sa roditeljima, prostorijom za pomoćno – tehničko osoblje i sanitarnim čvorom.



Bez obzira na sve prepreke u svakodnevnom radu i organizaciji nastave (između ostalog i učenici JU „Opća gimnazija“ već petu školsku godinu borave u zgradi Centralne škole), opredijeljeni smo da ostvarimo našu viziju. Želimo postati škola prepoznatljiva po svim značajkama savremene konfluentne škole! Kvalitetnim izvođenjem redovne nastave i vannastavnih aktivnosti, poticanjem inovativnih ideja svih činilaca didaktičkog trougla, inkluzivnog karaktera obrazovanja, cjeloživotnog učenja, proširivanjem i jačanjem saradnje sa lokalnom zajednicom, učešćem u različitim projektima bitnim za lokalnu zajednicu, ostvarit ćemo cilj kojem težimo!



Organizator 20. federalnog takmičenja iz matematike za učenike osnovnih škola je Udruženje matematičara Unsko – sanskog kantona. To je strukovno, nevladino, neprofitno, dobrovoljno, vanstranačko udruženje građana kojima je zajednički cilj unapređivanje i promicanje svih aspekata matematičkih nauka, nastave matematike na svim razinama i općenito vaspitno – obrazovne i društvene djelatnosti u području matematike i srodnih disciplina, primjene matematike u drugim disciplinama, kao i unapređivanje položaja matematičara i matematike u cjelini.

Udruženje, čije je sjedište u Bihaću, osnovano je 21.6.2013. godine i ima 198 registrovanih članova.

Bilten s 20. federalnog takmičenja iz matematike za učenike osnovnih škola, sa zadacima, rješenjima i rezultatima će biti objavljen na web stranici Udruženja matematičara Unsko – sanskog kantona www.umusk.com.

Organizaciju i provođenje takmičenja, školi domaćinu JU „Druga osnovna škola“ Bosanska Krupa, i organizatoru Udruženju matematičara Unsko – sanskog kantona, su pomogli:

- Općina Bosanska Krupa
- Grad Bihać
- UNDP – Regionalni ured Bihać
- Pedagoški zavod USK
- Bihaćka pivovara d.d., Bihać
- Izdavačka kuća NAM, Tuzla
- Sarajevo Publishing dd, Sarajevo
- Bijelić gradnja d.o.o., Brčko
- JKP JU „10. juli“ d.o.o., Bos. Krupa
- Meggle mljekara d.o.o., Bihać
- Ćima commerce d.o.o., Bos. Krupa
- Pekara Veli, Bos. Krupa
- Red computers d.o.o., Bos. Krupa
- BA i HAM d.o.o., Bos. Krupa
- BC gradnja d.o.o., Bos. Otoka
- Vaš dom d.o.o., Cazin
- Đana commerc d.o.o., Bos. Krupa
- Vispak, Visoko
- Velefah d.o.o., Cazin
- Jasmina Pervan, Sarajevo
- Amira Hadžipašić, Bos. Krupa
- Sanela Grošić, Bos. Krupa
- Amela Hodžić, Bos. Krupa
- Esada Sarkić, Bos. Krupa
- Zaposlenici JU „Druga osnovna škola“, Bosanska Krupa

SPISAK PRIJAVLJENIH TAKMIČARA U KATEGORIJI VII/9 i VI/8 RAZREDA

| | | |
|---------------------|-------|---|
| Ahmetović Zerina | VII/9 | OŠ "Pazar", Tuzla |
| Ahmetspahić Admir | VII/9 | OŠ "Meša Selimović", Sarajevo |
| Alagić Azra | VII/9 | OŠ "Skender Kulenović", Sarajevo |
| Alibašić Dalila | VII/9 | OŠ "25. novembar", Velika Kladuša |
| Arnaut Belmin | VII/9 | OŠ "Orahovica", Donja Orahovica – Gračanica |
| Avdukić Hana | VII/9 | OŠ "Safvet-beg Bašagić", Breza |
| Babić Azra | VII/9 | OŠ "Safvet-beg Bašagić", Visoko |
| Baković Faruk | VII/9 | OŠ "Hamdija Kreševljaković", Sarajevo |
| Basarić Lamija | VI/8 | "Druga osnovna škola" Bugojno |
| Bataković Edvin | VII/9 | OŠ "Sead Čehić", Grahovo - Velika Kladuša |
| Čalkić Ahmed | VII/9 | OŠ "Vladimir Nazor", Zenica |
| Čaušević Ajdin | VII/9 | "Prva osnovna škola", Velika Kladuša |
| Dedić Elma | VII/9 | OŠ "Ćamil Sijarić", Zenica |
| Djedović Ema | VII/9 | OŠ "Kreka", Tuzla |
| Džafić Selma | VII/9 | OŠ "Čelić", Čelić |
| Galijašević Sara | VII/9 | OŠ "Sead Čehić", Grahovo - Velika Kladuša |
| Hadžić Larisa | VI/8 | "Druga osnovna škola" Bugojno |
| Halilbegović Merima | VII/9 | OŠ "Safvet-beg Bašagić", Visoko |
| Hatić Vedad | VII/9 | OŠ "Vrhbosna", Sarajevo |
| Imamović Tarik | VI/8 | OŠ "Vitez", Vitez |
| Jahić Amina | VII/9 | OŠ "Pazar", Tuzla |
| Jašarević Edis | VI/8 | OŠ "Mehurići", Mehurići – Travnik |
| Kosović Alen | VII/9 | OŠ "Gornje Prekounje - Ripač", Bihać |
| Mehanović Adna | VII/9 | OŠ "Dr. Safvet-beg Bašagić", Gradačac |
| Mešanović Mak | VII/9 | OŠ "Isak Samokovlja", Sarajevo |
| Muratović Alem | VII/9 | OŠ "Husein ef. Đozo", Goražde |
| Mursalinova Elina | VII/9 | OŠ "Fatima Gunić", Sarajevo |
| Mutapčić Lejla | VII/9 | OŠ "Meša Selimović", Zenica |
| Nuhić Anis | VII/9 | OŠ "Lukavac Grad", Lukavac |
| Osmić Asja | VII/9 | OŠ "Pazar", Tuzla |
| Pajalić Merima | VII/9 | OŠ "Konjodor", Konjodor – Bužim |
| Paradžik Sandro | VII/9 | OŠ "Čengić - Vila 1", Sarajevo |
| Ratković Meriha | VII/9 | OŠ "Husein ef. Đozo", Goražde |
| Rustempašić Nur | VI/8 | "Treća osnovna škola", Bugojno |
| Saračević Aldin | VII/9 | OŠ "Međan", Tuzla |
| Suljkanović Dženita | VII/9 | OŠ "Otoka", Bosanska Otoka |
| Šabanović Hatidža | VI/8 | OŠ "Travnik", Travnik |
| Zirić Haris | VII/9 | OŠ "Harmani I", Bihać |

SPISAK PRIJAVLJENIH TAKMIČARA U KATEGORIJI VIII/9 i VII/8 RAZREDA

| | | |
|--------------------|--------|---|
| Bajrović Bakir | VIII/9 | OŠ "Isak Samokovlja", Sarajevo |
| Beganović Tarik | VIII/9 | OŠ "Cazin II", Cazin |
| Berkovac Tarik | VIII/9 | OŠ "Olovo", Olovo |
| Biogradlja Lamija | VIII/9 | OŠ "Edhem Mulabdić", Zenica |
| Bobić Nail | VIII/9 | "Druga osnovna škola", Bosanska Krupa |
| Ćatić Hana | VIII/9 | OŠ "Musa Ćazim Ćatić", Sarajevo |
| Dadić Eldar | VII/8 | "Treća osnovna škola", Bugojno |
| Dedović Nejra | VIII/9 | "Osma osnovna škola - Amer Ćenanović", Iličić |
| Delić Aldina | VIII/9 | OŠ "Prokosovići", Prokosovići – Lukavac |
| Dervišagić Kenan | VIII/9 | OŠ "Ivan Goran Kovačić", Gradačac |
| Dizdarević Abdulah | VIII/9 | OŠ "Meša Selimović", Zenica |
| Dupanović Nimaj | VIII/9 | OŠ "Harmani I", Bihać |
| Efendić Nura | VIII/9 | OŠ "Tušanj", Tuzla |
| Fazlić Amina | VIII/9 | OŠ "Pazar", Tuzla |
| Festić Amnesa | VIII/9 | "Prva osnovna škola", Stolac |
| Gjocaj Hana | VIII/9 | "Prva osnovna škola", Velika Kladuša |
| Grbo Vedad | VIII/9 | OŠ "Dr. Safvet-beg Bašagić", Sarajevo |
| Grcić Šejla | VIII/9 | "Druga osnovna škola", Konjic |
| Hadžić Amar | VIII/9 | OŠ "Dr. Safvet-beg Bašagić", Sarajevo |
| Hrkić Maida | VIII/9 | "Prva osnovna škola", Zavidovići |
| Ibrišimović Nafija | VIII/9 | OŠ "Đulistan", Lješevo - Podlugovi – Ilijaš |
| Jašarspahić Zerina | VIII/9 | OŠ "Mula Mustafa Bašeskija", Kakanj |
| Kalajdžić Muhamed | VIII/9 | OŠ "Musa Ćazim Ćatić", Sarajevo |
| Kandić Elma | VIII/9 | OŠ "Hrasno", Sarajevo |
| Kavazović Muhibija | VIII/9 | OŠ "Tušanj", Tuzla |
| Kenan Fejzić | VIII/9 | "Druga osnovna škola", Srebrenik |
| Klovo Senad | VIII/9 | OŠ "Husein ef. Đozo", Goražde |
| Kurbegović Adna | VII/8 | OŠ "Pajić Polje", Gornji Vakuf" |
| Kurtović Amina | VIII/9 | OŠ "Mula Mustafa Bašeskija", Sarajevo |
| Mičijević Amina | VIII/9 | OŠ "Hrasno", Sarajevo |
| Milić Dženita | VIII/9 | OŠ "Mula Mustafa Bašeskija", Sarajevo |
| Mujkić Amila | VII/8 | OŠ "Safvet-beg Bašagić", Novi Travnik |
| Musemić Amra | VIII/9 | OŠ "Pazar", Tuzla |
| Omerčević Iman | VIII/9 | OŠ "Cazin II", Cazin |
| Omić Ferid | VIII/9 | "Prva osnovna škola", Zavidovići |
| Osmanović Sara | VIII/9 | OŠ "Sveti Franjo", Tuzla |
| Pehar Mak | VIII/9 | OŠ "Novi grad", Tuzla |
| Perla Ismihana | VIII/9 | OŠ "Husein ef. Đozo", Goražde |
| Podanović Elvedin | VIII/9 | OŠ "Poljice", Poljice – Lukavac |
| Selimović Dženana | VIII/9 | "Druga osnovna škola", Živinice |
| Softić Ajna | VIII/9 | OŠ "Dr. Safvet-beg Bašagić", Gradačac |
| Šabanović Belma | VIII/9 | OŠ "Vladislav Skarić", Sarajevo |
| Tahirović Faik | VIII/9 | OŠ "Grbavica II", Sarajevo |
| Tikveša Medina | VIII/9 | "Prva osnovna škola", Stolac |
| Tutić Ema | VIII/9 | OŠ "Husein ef. Đozo", Goražde |
| Vojić Elma | VIII/9 | OŠ "Kulen - Vakuf, Orašac", Kulen – Vakuf |
| Zejni洛ović Berina | VIII/9 | OŠ "Mehmedalija Mak Dizdar", Sarajevo |
| Zolota Emina | VIII/9 | "Osma osnovna škola - Amer Ćenanović", Iličić |

SPISAK PRIJAVLJENIH TAKMIČARA U KATEGORIJI IX/9 i VIII/8 RAZREDA

| | | |
|---------------------------|--------|---|
| Beganović Ilhana | VIII/8 | OŠ "Travnik", Travnik |
| Begić Hamza | IX/9 | OŠ "Musa Ćazim Ćatić", Sarajevo |
| Berkovac Mejra | IX/9 | OŠ "Olovo", Oovo |
| Bešo Amer | VIII/8 | OŠ "Travnik", Travnik |
| Džaka Tarik | IX/9 | OŠ "Zahid Baručija", Vogošća |
| Fejzić Hana | IX/9 | OŠ "Safvet-beg Bašagić", Visoko |
| Garib Namir | VIII/8 | "Prva osnovna škola", Bugojno |
| Gjocaj Arijana | IX/9 | "Prva osnovna škola", Velika Kladuša |
| Goran Bakir | VIII/8 | OŠ "Travnik", Travnik |
| Grabus Lamija | IX/9 | OŠ "Dr. Safvet-beg Bašagić", Sarajevo |
| Grbić Amina | IX/9 | "Druga osnovna škola", Gračanica |
| Hajdarević Ervin | IX/9 | OŠ "Solina", Tuzla |
| Handžić Emina | IX/9 | OŠ "Safvet-beg Bašagić", Visoko |
| Hidić Nejla | IX/9 | "Prva osnovna škola", Maglaj |
| Imamović Ahmed | IX/9 | OŠ "Kalesija", Kalesija |
| Imširović Eldar | IX/9 | OŠ "Musa Ćazim Ćatić", Zelinja Donja – Gradačac |
| Jašarević Hamza | IX/9 | OŠ "Safvet-beg Bašagić", Visoko |
| Kajtaz Ajla | IX/9 | "Šesta osnovna škola", Mostar |
| Karić Amera | IX/9 | OŠ "Olovo", Oovo |
| Keserović Džana | IX/9 | "Prva osnovna škola", Velika Kladuša |
| Kraljević Luka | IX/9 | KŠC OŠ "Centar", Sarajevo |
| Kreho Dženan | IX/9 | OŠ "Skender Kulenović", Sarajevo |
| Larma Martina | IX/9 | OŠ "Isak Samokovlija", Sarajevo |
| Mandžić Šejla | IX/9 | OŠ "Kreka", Tuzla |
| Mehanović Omer Abdulkerim | IX/9 | OŠ "Dr. Safvet-beg Bašagić", Gradačac |
| Mirza Omerčić | IX/9 | OŠ "Duboki potok", Duboki Potok – Srebrenik |
| Murić Adijan | IX/9 | OŠ "Tržačka Raštela", Tržačka Raštela – Cazin |
| Muslić Hana | IX/9 | OŠ "Skender Kulenović", Zenica |
| Mušinbegović Adisa | IX/9 | OŠ "Đulistan", Lješovo - Podlugovi – Ilijaš |
| Osmanović Arnes | IX/9 | OŠ "Gornja Orahovica", Gračanica |
| Osmanspahić Emir | IX/9 | OŠ "Husein ef. Đozo", Goražde |
| Pozderac Admir | IX/9 | OŠ "Musa Ćazim Ćatić", Sarajevo |
| Resulović Amila | IX/9 | OŠ "Safvet-beg Bašagić", Visoko |
| Silić Ilda | IX/9 | OŠ "Cazin I", Cazin |
| Skelić Lejla | IX/9 | "Četvrta osnovna škola", Hrasnica |
| Smailagić Sead | IX/9 | OŠ "Miladije", Tuzla |
| Smajlović Emina | IX/9 | OŠ "Dr. Safvet-beg Bašagić", Sarajevo |
| Stock Matthias | IX/9 | "Prva osnovna škola", Maglaj |
| Suljić Sabina | IX/9 | OŠ "Poljice", Poljice – Lukavac |
| Šehović Ajla | IX/9 | OŠ "Musa Ćazim Ćatić", Sarajevo |
| Vardo Lejla | IX/9 | OŠ "Skender Kulenović", Zenica |
| Velašević Boris | IX/9 | OŠ "Osman Nakaš", Sarajevo |
| Zukić Nudžejma | VIII/8 | OŠ "Travnik", Travnik |
| Zuko Alen | IX/9 | OŠ "Fahrudin Fahro Baščelija", Goražde |





UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
/ BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY/

UDRUŽENJE MATEMATIČARA UNSKO-SANSKOG KANTONA



**56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BiH
20. FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
Bosanska Krupa, 23. maj 2015. godine**

**Z A D A C I
VII/9 i VI/8 razred**

- 1.** Odrediti mjere dva suplementna ugla koji se razlikuju za $1'$.
- 2.** Jednog dana su učenici u školi organizirali razmjenu voća po sljedećem principu: 11 jagoda su mijenjali za 14 malina, 22 trešnje za 21 malinu, 10 trešanja za 3 banane i 5 krušaka za 2 banane. Koliko će krušaka dati Amila da bi dobila 7 jagoda?
- 3.** Neka je \overline{AD} težišna linija trougla ABC i S njena središnja tačka. Neka je E tačka presjeka pravih AB i CS . Dokazati da je $|\overline{BE}| = 2|\overline{AE}|$.
- 4.** Koji broj treba oduzeti od brojnika i dodati nazivniku razlomka $\frac{28a3}{7276}$ da bi se poslije skraćivanja dobio razlomak $\frac{2}{7}$?
- 5.** Na koliko se načina iznos od 2015 KM može isplatiti ako posjedujemo kovanice po 1 KM i novčanice od: 10 KM, 100 KM i 200 KM?

- *Svaki zadatak je vrednovan sa 10 poena.*
- *U toku rada nije dozvoljeno izlaženje iz učionice niti korištenje digitrona i mobitela.*
- *Vrijeme za rad je 180 minuta.*

S R E T N O !

1. I način:

Neka su ti uglovi α i β . Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 180^\circ \\ \alpha - \beta &= 1'.\end{aligned}$$

Odavde je $2\alpha = 180^\circ 1' = 180^\circ 60''$, pa je $\alpha = 90^\circ 30''$. Zbog toga je

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ 30'' = 179^\circ 59'60'' - 90^\circ 30'' = 89^\circ 59'30''.$$

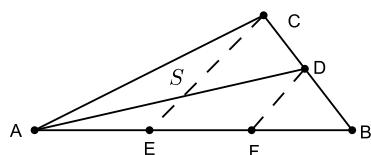
II način: Očito je da se uglovi α i β razlikuju od sredine ugla od 180° , tj. od 90° , za po pola minute, odnosno $30''$. Jedan je veći od 90° za $30''$, tj. iznosi $90^\circ 30''$, a drugi je manji od 90° za $30''$, tj. iznosi $89^\circ 59'30''$.

2. Iz prvog uvjeta zaključujemo da je $33J = 42M$, a iz drugog da je $42M = 44T$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow 33J &= 44T &\Rightarrow 3J &= 4T \\ \Rightarrow 15J &= 20T &\Rightarrow 15J &= 2 \cdot 3B = 6B \\ &&\Rightarrow 5J &= 2B\end{aligned}$$

Kako je $5K = 2B$, zaključujemo da je $5J = 5K$, tj. $J = K$, pa je $7J = 7K$. Dobili smo da Amila treba dati 7 krušaka da bi dobila 7 jagoda.

3. Pogledajmo sliku.



Neka je F središte duži \overline{BE} . Kako je D središte duži \overline{BC} , to je DF srednja linija trougla BCE . Tada je $\overline{DF} \parallel \overline{CE}$. Dakle, $\overline{SE} \parallel \overline{DF}$. Kako je S središte duži \overline{AD} i $\overline{SE} \parallel \overline{DF}$, to je \overline{SE} srednja linija trougla AFD . Tada je E središte duži \overline{AF} pa je $|\overline{AE}| = |\overline{EF}|$. Po konstrukciji tačke F vrijedi $|\overline{EF}| = |\overline{BF}|$. Dakle, $|\overline{AE}| = |\overline{EF}| = |\overline{FB}|$ tj.

$$|\overline{BE}| = |\overline{BF}| + |\overline{FE}| = 2|\overline{EF}| = 2|\overline{AE}|.$$

4. Primjetimo, prvo, da iz $\frac{m}{n} = \frac{2}{7}$ ($m, n \in \mathbb{N}$) slijedi da je $7m = 2n$. Odavde slijedi da $7 \mid n$, pa postoji prirodan broj d takav da je $n = 7d$. Sada imamo da je $7m = 2 \cdot 7d$, tj. $m = 2d$. Dakle, ako je $\frac{m}{n} = \frac{2}{7}$ ($m, n \in \mathbb{N}$), onda je $m = 2d$ i $n = 7d$, ($d \in \mathbb{N}$).

Neka je x traženi prirodan broj, tj. neka je

$$\frac{\overline{28a3} - x}{7276 + x} = \frac{2}{7}.$$

Tada, na osnovu naprijed navedenog, postoji prirodan broj d takav da je $\overline{28a3} - x = 2d$ i $7276 + x = 7d$. Sabiranjem ove dvije jednačine dobije se $\overline{28a3} + 7276 = 9d$, tj. $10079 + 10a = 9d$. Odavde imamo $10080 + 9a + a - 1 = 9d$, tj. $a - 1 = 9(d - a - 1120)$. Dakle, broj $a - 1$ je djeljiv sa 9. Kako je a decimalna cifra, to je jedino moguće ako je $a = 1$. Tada je $0 = 9(d - 1 - 1120)$, tj. $d = 1121$. Tada iz $2813 - x = 2d$ slijedi $x = 2813 - 2d = 2813 - 2242 = 571$. Dakle, traženi broj je 571.

5. Iznos od 5KM se može isplatiti samo na 1 način i to koristeći kovanice od 1KM, pa je broj načina da se isplati iznos od 2015KM jednak broju načina da se isplati iznos od 2010KM.

Ako koristimo samo kovanice od 1KM i novčanice od 10KM, onda se iznos od 2010KM može isplatiti s 0 ili 1 ili 2 ili 3 ili ... ili 201 novčanica od 10KM, tj. na 202 načina.

Ako koristimo kovanice od 1KM i novčanice od 10KM i 100KM, onda imamo sljedeću situaciju:

- 0 novčanica od 100KM – tada se, prema prethodnom, iznos od 2010KM može isplatiti, pomoću 1KM i 10KM, na 202 načina,
- 1 novčanica od 100KM – tada se preostali iznos od 1910KM, analogno prethodnom, može pomoću 1KM i 10KM isplatiti na 192 načina,

- 2 novčanice od 100KM – tada se preostali iznos od 1810KM, analogno prethodnom, može pomoći 1KM i 10KM isplatiti na 182 načina,
- ...
- 20 novčanica od 100KM – tada se preostali iznos od 10KM, analogno prethodnom, može pomoći 1KM i 10KM isplatiti na 2 načina.

Zaključujemo da ako koristimo samo kovanice od 1KM i novčanice od 10KM i 100KM, onda se iznos od 2010KM može isplatiti na

$$2 + 12 + 22 + \cdots + 192 + 202 = 2142$$

načina.

Sada posmatramo upotrebu 1KM, 10KM, 100KM i 200KM, pa analogno prethodno opisanom, imamo sljedeću situaciju:

- 0 novčanica od 200KM – tada se, prema prethodnom, iznos od 2010KM može isplatiti, pomoći 1KM, 10KM i 100KM, na 2142 načina,
- 1 novčanica od 200KM – tada se, prema prethodnom, iznos od 1810KM može isplatiti, pomoći 1KM, 10KM i 100KM, na

$$2 + 12 + 22 + \cdots + 172 + 182 = 1748$$

načina,

- 2 novčanice od 200KM – tada se, prema prethodnom, iznos od 1610KM može isplatiti, pomoći 1KM, 10KM i 100KM, na

$$2 + 12 + 22 + \cdots + 152 + 162 = 1394$$

načina,

- ...

- 10 novčanica od 200KM – tada se, prema prethodnom, iznos od 10KM može isplatiti, pomoći 1KM, 10KM i 100KM, na 2 načina.

Zaključujemo da ako koristimo samo kovanice od 1KM i novčanice od 10KM, 100KM i 1000KM, onda se iznos od 2010KM može isplatiti na

$$2 + 36 + 110 + 224 + 378 + 572 + 806 + 1080 + 1394 + 1748 + 2142 = 8492$$

načina.



UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
/ BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY/

UDRUŽENJE MATEMATIČARA UNSKO-SANSKOG KANTONA



**56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BiH
20. FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
Bosanska Krupa, 23. maj 2015. godine**

**Z A D A C I
VIII/9 i VII/8 razred**

- 1.** Svaki od šest kamiona jedne građevinske kompanije je vozio 8 sati i svi zajedno su za to vrijeme potrošili 720 litara nafte. Koliko će nafte potrošiti devet kamiona te kompanije ako svaki od njih vozi po 6 sati? (Podrazumijeva se da je potrošnja goriva ravnomjerna po kamionima i po satima vožnje.)
 - 2.** Prodavac je cijenu jedne košulje prvo smanjio za 20%, a zatim je povećao za 10%. Da li ponovo tu cijenu treba da korigira naviše ili naniže i za koliko procenata da bi imao cijenu 10% nižu od prvobitne?
 - 3.** Odrediti površinu četverougla $ABCD$ za kojeg znamo sljedeće: dva suprotna ugla su pravi; dvije stranice koje zatvaraju jedan od njih su jednakе dužine; zbir dužina druge dvije stranice iznosi 10 cm .
 - 4.** Na pijaci jedan prodavac ima lubenice, dinje i klipove mladog kukuruza i prodaje ih na komad. Ukupan broj lubenica, dinja i klipova mladog kukuruza je 239. Jedan je kupac kupio $\frac{2}{3}$ svih lubenica, $\frac{3}{5}$ svih dinja i $\frac{5}{7}$ svih klipova mladog kukuruza. Drugi kupac je kupio $\frac{1}{13}$ svih lubenica, $\frac{1}{4}$ svih dinja i $\frac{1}{5}$ svih klipova mladog kukuruza. Koliko je ukupno komada svega kupio drugi kupac i koliko je prodavac imao na pošetku lubenica, dinja i klipova mladog kukuruza?
 - 5.** Zadano je 2015 brojeva koji imaju osobinu da ako se svaki od njih zamijeni zbirom ostalih, dobije se ponovo istih 2015 brojeva. Dokazati da je proizvod svih zadanih brojeva jednak 0.
- *Svaki zadatak je vrednovan sa 10 poena.*
 - *U toku rada nije dozvoljeno izlaženje iz učionice niti korištenje digitrona i mobitela.*
 - *Vrijeme za rad je 180 minuta.*

S R E T N O !

1. Šest kamiona je ukupno radilo 48 sati, dok bi devet kamiona ukupno radilo 54 sata. Broj sati je direktno proporcionalan utrošku nafte, pa vrijedi

$$48 : 54 = 720 : x,$$

odakle je

$$x = \frac{54 \cdot 720}{48} = 810.$$

Dakle, devet kamiona, vozeći po 6 sati, će potrošiti ukupno 810 litara nafte.

2. Neka je polazna cijena x . Nakon sniženja za 20% imamo novu cijenu $x - \frac{20}{100}x = 0,8x$. Zatim se ta nova cijena povećala za 10% i iznosi

$$0,8x + \frac{10}{100} \cdot 0,8x = 0,88x.$$

Cijena koja je 10% niža od prvobitne je $x - \frac{10}{100}x = 0,9x$. Iz ovoga slijedi da novu cijenu $0,88x$ treba povećati da se dobije $0,90x$. Neka je to povećanje $y\%$. Tada je

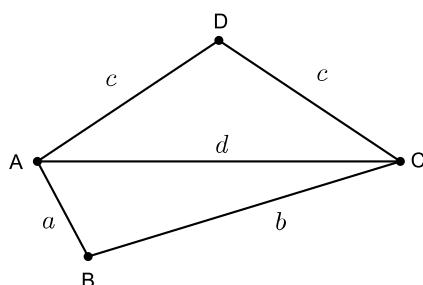
$$0,88x \cdot \frac{100 + y}{100} = 0,90x,$$

odakle dobijemo

$$\frac{100 + y}{100} = \frac{0,90}{0,88} \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{100} \approx 1,0227 \Leftrightarrow y = 100 \cdot 0,0227 \approx 2,27.$$

Dakle, korekcija nove cijene naviše treba da bude za približno 2,27%.

3. Nacrtajmo sliku i uvedimo potrebne oznake.



Neka je $|\overline{AB}| = a$, $|\overline{BC}| = b$, $|\overline{CD}| = |\overline{AD}| = c$ i $|\overline{AC}| = d$.

Iz uvjeta zadatka imamo da vrijedi $a + b = 10$.

Primijenimo li Pitagorin teorem na pravougle trouglove ABC i ACD imamo da vrijedi

$$a^2 + b^2 = d^2 \quad \text{i} \quad c^2 + c^2 = d^2.$$

Izjednačimo li te dvije relacije imamo da je

$$a^2 + b^2 = 2c^2.$$

Kako je $a + b = 10$, to nakon kvadriranja dobijamo da je

$$a^2 + 2ab + b^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 100 - 2ab,$$

pa je

$$2c^2 = 100 - 2ab \quad \Rightarrow \quad c^2 = 50 - ab \quad \Rightarrow \quad ab + c^2 = 50.$$

Ako posmatramo površine četverougla $ABCD$, te trouglova ABC i ACD , onda vidimo da je

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD} = \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} = \frac{ab + c^2}{2} = \frac{50}{2} = 25\text{cm}^2.$$

4. Neka je broj komada lubenica L , dinja D i mladog kukuruza K . Prema pretpostavci zadatka vrijedi

$$L + D + K = 239.$$

Prvi kupac je kupio

$$\frac{2}{3}L + \frac{3}{5}D + \frac{5}{7}K,$$

a drugi kupac je kupio

$$\frac{1}{13}L + \frac{1}{4}D + \frac{1}{5}K.$$

Kako prodavac prodaje proizvode na komad, to je broj lubenica djeljiv s 3 i 13, broj dinja je djeljiv s 5 i 4, a broj klipova mladog kukuruza je djeljiv sa 7 i 5. Kako je

$$\text{nzd}(3, 13) = \text{nzd}(5, 4) = \text{nzd}(7, 5) = 1,$$

te kako je

$$\text{nzs}(3, 13) = 39, \quad \text{nzs}(5, 4) = 20, \quad \text{nzd}(7, 5) = 35,$$

to je broj lubenica djeljiv s 39, broj dinja je djeljiv s 20 a broj klipova kukuruza je djeljiv s 35. Dakle, imamo da je

$$L = 39x, \quad D = 20y, \quad K = 35z, \quad x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Sada imamo

$$39x + 20y + 35z = 239,$$

i vrijedi

$$\begin{aligned} 39x \leq 239 &\Rightarrow x \leq 6, \\ 20y \leq 239 &\Rightarrow y \leq 11, \\ 35z \leq 239 &\Rightarrow z \leq 6. \end{aligned}$$

Zadnja cifra broja $20y$ jednaka je 0, dok je zadnja cifra broja $35z$ jednaka 0 ili 5.

1° Neka je zadnja cifra broja $35z$ jednaka 0. Tada je zadnja cifra broja $20y+35z$ također jednaka 0, pa zaključujemo da zadnja cifra broja $39x$ mora biti jednaka 9. To je moguće samo u slučaju kada je zadnja cifra broja x jednaka 1. Kako je $x \leq 6$, to zaključujemo da je $x = 1$.

Sada imamo da je

$$39 \cdot 1 + 20y + 35z = 239 \Rightarrow 20y + 35z = 200 \Rightarrow 4y + 7z = 40.$$

Vidimo da z mora biti paran broj, a kako je $z \leq 6$, to imamo da je $z \in \{2, 4, 6\}$.

$$\begin{aligned} z = 2 &\Rightarrow 4y = 26 \quad (y \notin \mathbb{N}) \\ z = 4 &\Rightarrow 4y = 12 \Rightarrow y = 3, \\ z = 6 &\Rightarrow 4y = -2 \quad (y \notin \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Dobili smo da je jedno rješenje

$$(x, y, z) = (1, 3, 4).$$

2° Neka je zadnja cifra broja $35z$ jednaka 5. Tada je zadnja cifra broja $20y+35z$ također jednaka 5, pa zaključujemo da zadnja cifra broja $39x$ mora biti jednaka 4. To je moguće samo u slučaju kada je zadnja cifra broja x jednaka 6. Kako je $x \leq 6$, to zaključujemo da je $x = 6$.

Sada imamo da je

$$39 \cdot 6 + 20y + 35z = 239 \Rightarrow 20y + 35z = 5,$$

pa zaključujemo da u ovom slučaju jednačina nema rješenja.

Dobili smo da je jedino rješenje $(x, y, z) = (1, 3, 4)$, tj.

$$L = 39 \cdot 1 = 39, \quad D = 20 \cdot 3 = 60, \quad K = 35 \cdot 4 = 140.$$

Prodavač je na početku imao 39 lubenica, 60 dinja i 140 klipova mladog kukuruza.

Kako je

$$\frac{1}{13} \cdot 39 + \frac{1}{4} \cdot 60 + \frac{1}{5} \cdot 140 = 3 + 15 + 28 = 46,$$

to zaključujemo da je drugi kupac kupio ukupno 46 komada i to 3 lubenice, 15 dinja i 28 klipova mladog kukuruza.

5. Sa S označimo zbir zadanih 2015 brojeva. Tada se broj a zamjenjuje brojem $b = S - a$. Saberemo li svih tih 2015 jednakosti, dobijamo

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{2015} = 2015S - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{2015}).$$

Kako je

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{2015} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{2015}) = S,$$

to je

$$S = 2015S - S \quad \Rightarrow \quad S = 0.$$

Zaključujemo da za svaki broj a postoji, među zadanim brojevima, broj $b = -a$. Na taj način bismo sve zadane brojeve razbili na parove $(a, -a)$, ali zbog neparnosti broja danih brojeva (2015) slijedi da među zadanim brojevima postoji broj a takav da je $a = -a$, tj. $a = 0$, pa je proizvod zadanih brojeva jednak 0.



UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
/ BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY/

UDRUŽENJE MATEMATIČARA UNSKO-SANSKOG KANTONA



**56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BiH
20. FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
Bosanska Krupa, 23. maj 2015. godine**

**Z A D A C I
IX/9 i VIII/8 razred**

- 1.** Ocu je sada 42 godine, a sinu 14 godina. Za koliko godina će otac biti dvostruko stariji od sina?

- 2.** Pokazati da vrijednost izraza

$$A = \frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}$$

ne zavisi od a, b i c .

- 3.** Neka je D središnja tačka stranice $|\overline{BC}|$ trougla ABC . Na stranici $|\overline{AB}|$ uzeta je tačka E , a na stranici $|\overline{AC}|$ uzeta je tačka F tako da je $\angle EDF = 90^\circ$. Dokazati da je $|\overline{BE}| + |\overline{CF}| > |\overline{EF}|$.

 - 4.** Neka je n prirodan broj i $a = 2^n \cdot 7^{n+1} + 11$ i $b = 2^{n+1} \cdot 7^n + 3$.
 - a) Dokazati da se razlomak $\frac{a}{b}$ ne može skratiti ni s jednim prirodnim brojem različitim od 1.
 - b) Dokazati da broj $a+b-7$ nije kvadrat ni jednog prirodnog broja ni za jedan prirodni broj n .

 - 5.** Dokazati da se pri svakom razbijanju skupa $X = \{1, 2, \dots, 9\}$ na dva disjunktna podskupa bar jedan od tih podskupova sadrži tri elementa takva da je suma dva od njih jednaka dvostrukom trećem elementu.
-
- *Svaki zadatak je vrednovan sa 10 poena.*
 - *U toku rada nije dozvoljeno izlaženje iz učionice niti korištenje digitrona i mobitela.*
 - *Vrijeme za rad je 180 minuta.*

S R E T N O !

1. Označimo sa x broj godina koje treba da prođu da bi otac bio dvostruko stariji od sina. Tada vrijedi

$$42 + x = 2(14 + x),$$

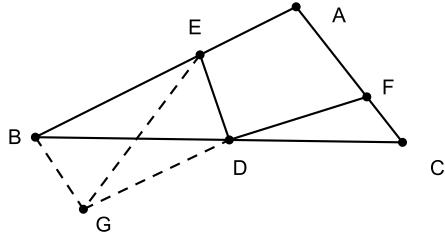
odakle je $x = 14$. Dakle, za 14 godina otac će imati 56 godina, a sin 28 godina i otac će biti dvostruko stariji od sina.

2. Imamo:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{(c-b)^3 + (a-c)^3 + (b-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)} \quad (\text{zbir kubova}) \\ &= \frac{(c-b+a-c) [(c-b)^2 - (c-b)(a-c) + (a-c)^2] + (b-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(a-b)(c^2 - 2bc + b^2 - ac + ab + c^2 - bc + a^2 - 2ac + c^2) + (b-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(a-b)(3c^2 + a^2 + b^2 - 3bc - 3ac + ab) - (a-b)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(a-b)(3c^2 + a^2 + b^2 - 3bc - 3ac + ab - a^2 + 2ab - b^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{3c^2 - 3bc - 3ac + 3ab}{(b-c)(c-a)} = 3 \cdot \frac{c(c-a) - b(c-a)}{(b-c)(c-a)} = 3 \cdot \frac{(c-a)(c-b)}{(b-c)(c-a)} \\ &= -3. \end{aligned}$$

Dakle, izraz A ima konstantnu vrijednost -3 , koja ne zavisi od a, b i c .

3. Da bismo mogli usporediti brojeve $\overline{BE} + \overline{CF}$ i \overline{EF} , potrebno je konstruisati neke nove duži koje su podudarne dužima $\overline{BE}, \overline{CF}$ i \overline{EF} .



U tu svrhu produžimo \overline{DF} preko F do tačke G tako da je $|\overline{GD}| = |\overline{DF}|$, pa kako je još $|\overline{ED}| = |\overline{ED}|$ i $\angle GDE = \angle FDE = 90^\circ$, to su trouglovi DEG i FED podudarni. Odavde slijedi da je $|\overline{EG}| = |\overline{EF}|$. Primjećujemo da trougao BGE sadrži dvije stranice koje su podudarne s \overline{BE} i \overline{EF} .

Pokažimo sada da vrijedi $|\overline{FC}| = |\overline{BG}|$. Imamo da je $|\overline{BD}| = |\overline{CD}|$, $|\overline{DG}| = |\overline{DF}|$ i $\angle GDB = \angle FDC$ (unakrsni uglovi), pa vrijedi da su trouglovi DBG i DCF podudarni. Iz te podudarnosti slijedi da je $|\overline{BG}| = |\overline{FC}|$.

Na kraju zaključujemo da je $|\overline{EF}| = |\overline{EG}| < |\overline{BE}| + |\overline{BG}| = |\overline{BE}| + |\overline{CF}|$.

4. a) Razlomak $\frac{a}{b}$ se može kratiti nekim brojem ako i samo ako taj broj dijeli nzd(a, b). Zbog toga odredimo nzd(a, b).

Neka je $d = \text{nzd}(a, b)$. Tada je $a = du$ i $b = dv$, pri čemu su u i v relativno prosti prirodni brojevi. Kako je $2a - 7b = 1$, to je

$$1 = 2du - 7dv = d(2u - 7v).$$

Odavde slijedi, kako d dijeli desnu stranu da mora dijeliti i lijevu stranu, da $d \mid 1$, pa je $\text{nzd}(a, b) = 1$. To znači da se razlomak može kratiti samo sa prirodnim brojem 1.

- b) Imamo

$$a+b-7 = 2^n \cdot 7^{n+1} + 11 + 2^{n+1} \cdot 7^n + 3 - 7 = 2^n \cdot 7^n (7+2) + 7 = 9 \cdot 2^n \cdot 7^n + 7.$$

Ako je $n = 1$, onda je $a+b-7 = 7 \cdot 19$. Broj $7 \cdot 19$ nije potpun kvadrat.

Prepostavimo da postoji prirodan broj $n \geq 2$ takav da je broj $a+b-7$ kvadrat nekog prirodnog broja, recimo broja k . Broj 2^n za $n \geq 2$ je djeljiv sa 4, pa broj $9 \cdot 2^n \cdot 7^n$ možemo napisati u obliku $4 \cdot m$, gdje je $m = 9 \cdot 2^{n-2} \cdot 7^n$. Tada je $k^2 = a + b - 7 = 4m + 7$. Ovo je neparan broj, pa je i k^2 neparan broj, a samim tim je i k neparan broj. Neka je $k = 2t + 1$. Tada imamo $4m + 7 = 4t^2 + 4t + 1$, tj. $4m + 6 = 4t(t + 1)$. Dakle, $2m - 2t(t + 1) = -3$. Ovo je nemoguće, jer je razlika bilo koja dva parna prirodna broja paran broj, a u našem slučaju ta razlika je neparan broj 3. Prepostavka da postoji prirodan broj $n \geq 2$ takav da je $a+b-7$ kvadrat nekog prirodnog broja dovela nas je do kontradikcije, pa nije tačna.

5. Prepostavimo da tvrdnja nije tačna, tj. da postoje disjunktni podskupovi A i B skupa X takvi da je $X = A \cup B$ i nijedan od skupova A i B ne sadrži tri elementa takva da je suma dva od njih jednaka dvostrukom trećem.

Broj 5 je u jednom od skupova A i B . Neka je npr. u A . Prepostavimo da je broj 3 također u A . Kako je $5 + 3 = 8$, to 4 nije u A . Iz $5 + 1 = 6$ slijedi da 1 nije u A . Iz $3 + 7 = 10$ slijedi da 7 nije u A . Dakle, brojevi 4, 1 i 7 pripadaju skupu B . No, $1+7=8$ povlači da brojevi 1, 4 i 7 nisu u B . Dobili smo kontradikciju. Dakle, $3 \notin A$, tj. $3 \in B$.

Na isti način zaključujemo da 7 nije u A , već je u B .

Ako bi brojevi 4 i 6 bili u A , onda bismo imali $4+6=10$, to znači da 4,5,6 ne mogu sva tri biti u A . Zato je bar jedan od brojeva 4 ili 6 u B . Neka je npr. $4 \in B$. Tada je $1 \in A$, jer bi u protivnom za elemente $1, 4, 7 \in B$ vrijedilo $1 + 7 = 8 = 2 \cdot 4$, što je suprotno prepostavci da ni jedan od skupova A i B nema tu osobinu. Kada bi 2 bilo u B imali bismo $2+4=6$, to povlači da bar jedan od brojeva 2, 3 i 4 nije u B . Dakle, 2 nije u B , pa je u A . Kako je $2 + 8 = 10$, to 8 nije u A , pa je 8 u B . Iz $8 + 4 = 12$ slijedi da je $6 \in A$. Iz $9 + 1 = 10$ slijedi da je 9 u B . Dobili smo 7, 8 i 9 u B što je nemoguće jer je $7 + 9 = 16$.

Prepostavka da je $4 \in B$ dovela nas je do kontradikcije, pa nije tačna. Na isti način se pokazuje da podatak $6 \in B$ vodi do kontradikcije. Dakle, brojevi 4 i 6 nisu u B , pa su u A . No, tada opet imamo kontradikciju jer je $4 + 6 = 10$. Dakle, prepostavka da tvrdnja nije tačna dovela nas je do kontradikcije, pa zaključujemo da prepostavka nije tačna.

| KATEGORIJA - VII/9 i VI/8 RAZRED | | | | | | | | | | |
|----------------------------------|---------------------|---|----|----|---|----|----|-----|----|-------------|
| P | PREZIME I IME | ŠKOLA | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | SVE | % | NAGRADA |
| 1 | Avdukić Hana | OŠ "Safvet-beg Bašagić", Breza | 10 | 10 | 1 | 10 | 2 | 33 | 66 | III nagrada |
| 2 | Bataković Edvin | OŠ "Sead Čehić", Grahovo - Velika Kladuša | 10 | 10 | 1 | 10 | 1 | 32 | 64 | III nagrada |
| 3 | Osmić Asja | OŠ "Pazar", Tuzla | 10 | 10 | 1 | 10 | 0 | 31 | 62 | III nagrada |
| 3 | Paradžik Sandro | OŠ "Čengić - Vila 1", Sarajevo | 10 | 10 | 1 | 10 | 0 | 31 | 62 | III nagrada |
| 3 | Hatić Vedad | OŠ "Vrhbosna", Sarajevo | 10 | 10 | 1 | 0 | 10 | 31 | 62 | III nagrada |
| 6 | Dedić Elma | OŠ "Ćamil Sijarić", Zenica | 10 | 10 | 2 | 8 | 0 | 30 | 60 | III nagrada |
| 7 | Basarić Lamija | "Druga osnovna škola" Bugojno | 10 | 10 | 1 | 8 | 0 | 29 | 58 | III nagrada |
| 8 | Saračević Aldin | OŠ "Međan", Tuzla | 10 | 10 | 1 | 2 | 2 | 25 | 50 | pohvala |
| 9 | Arnaut Belmin | OŠ "Orahovica", Donja Orahovica - Gračanica | 10 | 10 | 1 | 3 | 0 | 24 | 48 | pohvala |
| 9 | Hadžić Larisa | "Druga osnovna škola" Bugojno | 10 | 10 | 1 | 3 | 0 | 24 | 48 | pohvala |
| 11 | Alibašić Dalila | OŠ "25. novembar", Velika Kladuša | 10 | 10 | 1 | 2 | 0 | 23 | 46 | pohvala |
| 11 | Čalkić Ahmed | OŠ "Vladimir Nazor", Zenica | 10 | 10 | 3 | 0 | 0 | 23 | 46 | pohvala |
| 11 | Čaušević Ajdin | "Prva osnovna škola", Velika Kladuša | 10 | 1 | 1 | 10 | 1 | 23 | 46 | pohvala |
| 11 | Djedović Ema | OŠ "Kreka", Tuzla | 10 | 10 | 3 | 0 | 0 | 23 | 46 | pohvala |
| 11 | Mehanović Adna | OŠ "Dr. Safvet-beg Bašagić", Gradačac | 10 | 10 | 1 | 2 | 0 | 23 | 46 | pohvala |
| 16 | Alagić Azra | OŠ "Skender Kulenović", Sarajevo | 10 | 1 | 1 | 10 | 0 | 22 | 44 | |
| 16 | Mursalimova Elina | OŠ "Fatima Gunić", Sarajevo | 10 | 10 | 1 | 1 | 0 | 22 | 44 | |
| 18 | Ahmespahić Admir | OŠ "Meša Selimović", Sarajevo | 10 | 9 | 1 | 1 | 0 | 21 | 42 | |
| 18 | Muratović Alem | OŠ "Husein ef. Đozo", Goražde | 10 | 10 | 0 | 1 | 0 | 21 | 42 | |
| 18 | Zirić Haris | OŠ "Harmani I", Bihać | 10 | 10 | 0 | 1 | 0 | 21 | 42 | |
| 21 | Jašarević Edis | OŠ "Mehurići", Mehurići - Travnik | 10 | 2 | 1 | 2 | 4 | 19 | 38 | |
| 22 | Babić Azra | OŠ "Safvet-beg Bašagić", Visoko | 7 | 10 | 1 | 0 | 0 | 18 | 36 | |
| 23 | Galijašević Sara | OŠ "Sead Čehić", Grahovo - Velika Kladuša | 10 | 3 | 1 | 1 | 1 | 16 | 32 | |
| 24 | Ahmetović Zerina | OŠ "Pazar", Tuzla | 10 | 2 | 1 | 2 | 0 | 15 | 30 | |
| 25 | Jahić Amina | OŠ "Pazar", Tuzla | 10 | 1 | 1 | 2 | 0 | 14 | 28 | |
| 25 | Nuhić Anis | OŠ "Lukavac Grad", Lukavac | 10 | 2 | 1 | 0 | 1 | 14 | 28 | |
| 25 | Pajalić Merima | OŠ "Konjodor", Konjodor - Bužim | 10 | 2 | 1 | 1 | 0 | 14 | 28 | |
| 28 | Halilbegović Merima | OŠ "Safvet-beg Bašagić", Visoko | 10 | 1 | 1 | 1 | 0 | 13 | 26 | |
| 28 | Mutapčić Lejla | OŠ "Meša Selimović", Zenica | 10 | 1 | 1 | 1 | 0 | 13 | 26 | |
| 30 | Rustempašić Nur | "Treća osnovna škola", Bugojno | 0 | 10 | 1 | 1 | 0 | 12 | 24 | |
| 30 | Kosović Alen | OŠ "Gornje Prekounje - Ripač", Bihać | 10 | 1 | 1 | 0 | 0 | 12 | 24 | |
| 32 | Šabanović Hatidža | OŠ "Travnik", Travnik | 7 | 1 | 1 | 1 | 0 | 10 | 20 | |
| 33 | Ratković Meriha | OŠ "Husein ef. Đozo", Goražde | 6 | 1 | 1 | 1 | 0 | 9 | 18 | |
| 33 | Suljkanović Dženita | OŠ "Otoka", Bosanska Otoka | 7 | 1 | 0 | 1 | 0 | 9 | 18 | |
| 35 | Džafić Selma | OŠ "Čelić", Čelić | 3 | 1 | 1 | 1 | 0 | 6 | 12 | |
| 36 | Imamović Tarik | OŠ "Vitez", Vitez | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 5 | 10 | |
| 36 | Mešanović Mak | OŠ "Isak Samokovlja", Sarajevo | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 10 | |
| 38 | Baković Faruk | OŠ "Hamdija Kreševljaković", Sarajevo | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 | 4 | 8 | |

| KATEGORIJA - VIII/9 i VII/8 RAZRED | | | | | | | | | | |
|------------------------------------|---------------------|---|----|----|----|----|----|-----|----|-------------|
| P | PREZIME I IME | ŠKOLA | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | SVE | % | NAGRADA |
| 1 | Ćatić Hana | OŠ "Musa Ćazim Ćatić", Sarajevo | 10 | 9 | 10 | 9 | 10 | 48 | 96 | I nagrada |
| 2 | Omić Ferid | "Prva osnovna škola", Zavidovići | 10 | 10 | 3 | 10 | 10 | 43 | 86 | I nagrada |
| 3 | Gjocaj Hana | "Prva osnovna škola", Velika Kladuša | 10 | 10 | 10 | 10 | 1 | 41 | 82 | II nagrada |
| 4 | Podanović Elvedin | OŠ "Poljice", Poljice - Lukavac | 10 | 9 | 10 | 2 | 8 | 39 | 78 | II nagrada |
| 5 | Mujkić Amila | OŠ "Safvet-beg Bašagić", Novi Travnik | 10 | 5 | 10 | 10 | 3 | 38 | 76 | II nagrada |
| 5 | Tahirović Faik | OŠ "Grbavica II", Sarajevo | 10 | 9 | 2 | 8 | 9 | 38 | 76 | II nagrada |
| 7 | Vojić Elma | OŠ "Kulen - Vakuf, Orašac", Kulen - Vakuf | 10 | 6 | 10 | 0 | 10 | 36 | 72 | II nagrada |
| 7 | Biogradlja Lamija | OŠ "Edhem Mulabdić", Zenica | 10 | 4 | 10 | 10 | 2 | 36 | 72 | II nagrada |
| 9 | Zejničević Berina | OŠ "Mehmedalija Mak Dizdar", Sarajevo | 10 | 4 | 2 | 9 | 10 | 35 | 70 | II nagrada |
| 10 | Bobić Nail | "Druga osnovna škola", Bosanska Krupa | 10 | 4 | 10 | 0 | 10 | 34 | 68 | III nagrada |
| 11 | Grbo Vedad | OŠ "Dr. Safvet-beg Bašagić", Sarajevo | 10 | 1 | 10 | 8 | 0 | 29 | 58 | III nagrada |
| 12 | Mičijević Amina | OŠ "Hrasno", Sarajevo | 10 | 4 | 2 | 9 | 3 | 28 | 56 | III nagrada |
| 13 | Beganović Tarik | OŠ "Cazin II", Cazin | 10 | 4 | 10 | 0 | 2 | 26 | 52 | pohvala |
| 13 | Dizdarević Abdulah | OŠ "Meša Selimović", Zenica | 10 | 3 | 2 | 10 | 1 | 26 | 52 | pohvala |
| 15 | Osmanović Sara | OŠ "Sveti Franjo", Tuzla | 10 | 5 | 10 | 0 | 1 | 26 | 52 | pohvala |
| 16 | Bajrović Bakir | OŠ "Isak Samokovlja", Sarajevo | 10 | 4 | 10 | 0 | 1 | 25 | 50 | pohvala |
| 17 | Efendić Nura | OŠ "Tušanj", Tuzla | 10 | 3 | 10 | 0 | 1 | 24 | 48 | pohvala |
| 18 | Hrkić Maida | "Prva osnovna škola", Zavidovići | 10 | 2 | 10 | 0 | 1 | 23 | 46 | pohvala |
| 18 | Šabanović Belma | OŠ "Vladislav Skarić", Sarajevo | 10 | 4 | 8 | 0 | 1 | 23 | 46 | pohvala |
| 18 | Omerčević Iman | OŠ "Cazin II", Cazin | 10 | 6 | 5 | 0 | 2 | 23 | 46 | pohvala |
| 21 | Kalajdžić Muhamed | OŠ "Musa Ćazim Ćatić", Sarajevo | 10 | 0 | 0 | 9 | 3 | 22 | 44 | |
| 22 | Kavazović Muhimbija | OŠ "Tušanj", Tuzla | 10 | 5 | 2 | 0 | 2 | 19 | 38 | |
| 22 | Fejzić Kenan | "Druga osnovna škola", Srebrenik | 10 | 5 | 2 | 0 | 2 | 19 | 38 | |
| 24 | Grcić Šejla | "Druga osnovna škola", Konjic | 1 | 5 | 10 | 0 | 2 | 18 | 36 | |
| 24 | Tikveša Medina | "Prva osnovna škola", Stolac | 10 | 4 | 2 | 1 | 1 | 18 | 36 | |
| 26 | Berkovac Tarik | OŠ "Olovo", Olovo | 8 | 5 | 2 | 0 | 2 | 17 | 34 | |
| 26 | Dadić Eldar | "Treća osnovna škola", Bugojno | 10 | 6 | 0 | 0 | 1 | 17 | 34 | |
| 26 | Fazlić Amina | OŠ "Pazar", Tuzla | 10 | 4 | 2 | 0 | 1 | 17 | 34 | |
| 29 | Dupanović Nimaj | OŠ "Harmani I", Bihać | 5 | 10 | 0 | 0 | 1 | 16 | 32 | |
| 29 | Kandić Elma | OŠ "Hrasno", Sarajevo | 10 | 4 | 2 | 0 | 0 | 16 | 32 | |
| 31 | Dedović Nejra | "Osma osnovna škola - Amer Ćenanović", Ilijadža | 10 | 4 | 0 | 0 | 1 | 15 | 30 | |
| 31 | Softić Ajna | OŠ "Dr. Safvet-beg Bašagić", Gradačac | 10 | 1 | 2 | 0 | 2 | 15 | 30 | |
| 33 | Festić Amnesa | "Prva osnovna škola", Stolac | 10 | 0 | 2 | 1 | 1 | 14 | 28 | |
| 33 | Ibrišimović Nafija | OŠ "Đulistan", Lješovo - Podlugovi - Ilijadža | 10 | 1 | 2 | 0 | 1 | 14 | 28 | |
| 33 | Tutić Ema | OŠ "Husein ef. Đozo", Goražde | 10 | 2 | 2 | 0 | 0 | 14 | 28 | |
| 36 | Hadžić Amar | OŠ "Dr. Safvet-beg Bašagić", Sarajevo | 10 | 0 | 2 | 0 | 0 | 12 | 24 | |
| 36 | Jašarspahić Zerina | OŠ "Mula Mustafa Bašeskija", Kakanj | 5 | 5 | 2 | 0 | 0 | 12 | 24 | |
| 36 | Kurtović Amina | OŠ "Mula Mustafa Bašeskija", Sarajevo | 10 | 2 | 0 | 0 | 0 | 12 | 24 | |
| 36 | Milić Dženeta | OŠ "Mula Mustafa Bašeskija", Sarajevo | 10 | 0 | 0 | 0 | 2 | 12 | 24 | |
| 40 | Delić Aldina | OŠ "Prokosovići", Prokosovići - Lukavac | 1 | 0 | 10 | 0 | 0 | 11 | 22 | |
| 40 | Kurbegović Adna | OŠ "Pajić Polje", Gornji Vakuf" | 0 | 1 | 8 | 0 | 2 | 11 | 22 | |
| 42 | Pehar Mak | OŠ "Novi grad", Tuzla | 0 | 7 | 2 | 0 | 1 | 10 | 20 | |
| 42 | Dervišagić Kenan | OŠ "Ivan Goran Kovačić", Gradačac | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 20 | |
| 42 | Musemić Amra | OŠ "Pazar", Tuzla | 6 | 4 | 0 | 0 | 0 | 10 | 20 | |
| 45 | Selimović Dženana | "Druga osnovna škola", Živinice | 1 | 4 | 0 | 1 | 2 | 8 | 16 | |
| 45 | Zolota Emina | "Osma osnovna škola - Amer Ćenanović", Ilijadža | 2 | 4 | 0 | 0 | 2 | 8 | 16 | |
| 47 | Perla Ismihana | OŠ "Husein ef. Đozo", Goražde | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | |

Na Juniorsku matematičku olimpijadu BiH 2015 se plasiralo 10 prvoplasiranih takmičara.

| KATEGORIJA - IX/9 i VIII/8 RAZRED | | | | | | | | | | |
|-----------------------------------|---------------------------|---|----|----|----|----|----|-----|----|-------------|
| P | PREZIME I IME | ŠKOLA | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | SVE | % | NAGRADA |
| 1 | Šehović Ajla | OŠ "Musa Ćazim Ćatić", Sarajevo | 10 | 10 | 0 | 6 | 10 | 36 | 72 | II nagrada |
| 2 | Velašević Boris | OŠ "Osman Nakaš", Sarajevo | 10 | 10 | 0 | 10 | 3 | 33 | 66 | III nagrada |
| 3 | Kraljević Luka | KŠC OŠ "Centar", Sarajevo | 10 | 10 | 1 | 5 | 0 | 26 | 52 | pohvala |
| 3 | Skelić Lejla | "Četvrta osnovna škola", Hrasnica | 10 | 10 | 0 | 6 | 0 | 26 | 52 | pohvala |
| 5 | Vardo Lejla | OŠ "Skender Kulenović", Zenica | 10 | 10 | 0 | 1 | 3 | 24 | 48 | pohvala |
| 5 | Garib Namir | "Prva osnovna škola", Bugojno | 10 | 10 | 0 | 2 | 2 | 24 | 48 | pohvala |
| 7 | Zukić Nudžejma | OŠ "Travnik", Travnik | 9 | 2 | 0 | 10 | 2 | 23 | 46 | pohvala |
| 8 | Imamović Ahmed | OŠ "Kalesija", Kalesija | 10 | 9 | 0 | 1 | 2 | 22 | 44 | |
| 8 | Muslić Hana | OŠ "Skender Kulenović", Zenica | 10 | 10 | 0 | 0 | 2 | 22 | 44 | |
| 8 | Osmanspahić Emir | OŠ "Husein ef. Đozo", Goražde | 10 | 1 | 10 | 1 | 0 | 22 | 44 | |
| 11 | Beganović Ilhama | OŠ "Travnik", Travnik | 10 | 10 | 0 | 1 | 0 | 21 | 42 | |
| 11 | Murić Adijan | OŠ "Tržačka Raštela", Tržačka Raštela - Cazin | 10 | 10 | 0 | 0 | 1 | 21 | 42 | |
| 11 | Goran Bakir | OŠ "Travnik", Travnik | 10 | 10 | 0 | 1 | 0 | 21 | 42 | |
| 14 | Smailagić Sead | OŠ "Miladije", Tuzla | 10 | 10 | 0 | 0 | 0 | 20 | 40 | |
| 14 | Stock Matthias | "Prva osnovna škola", Maglaj | 10 | 10 | 0 | 0 | 0 | 20 | 40 | |
| 16 | Grabus Lamija | OŠ "Dr. Safvet-beg Bašagić", Sarajevo | 10 | 2 | 0 | 5 | 2 | 19 | 38 | |
| 17 | Džaka Tarik | OŠ "Zahid Baručja", Vogošća | 10 | 2 | 0 | 6 | 0 | 18 | 36 | |
| 17 | Kreho Dženan | OŠ "Skender Kulenović", Sarajevo | 10 | 6 | 0 | 2 | 0 | 18 | 36 | |
| 17 | Resulović Amila | OŠ "Safvet-beg Bašagić", Visoko | 9 | 6 | 0 | 1 | 2 | 18 | 36 | |
| 20 | Imširović Eldar | OŠ "Musa Ćazim Ćatić", Zelinja Donja - Gradačac | 10 | 2 | 0 | 2 | 2 | 16 | 32 | |
| 20 | Suljić Sabina | OŠ "Poljice", Poljice - Lukavac | 10 | 2 | 0 | 3 | 1 | 16 | 32 | |
| 22 | Silić Ilda | OŠ "Cazin I", Cazin | 10 | 2 | 0 | 1 | 2 | 15 | 30 | |
| 23 | Pozderac Admir | OŠ "Musa Ćazim Ćatić", Sarajevo | 10 | 1 | 0 | 0 | 3 | 14 | 28 | |
| 24 | Berkovac Mejra | OŠ "Olovo", Olovo | 9 | 2 | 0 | 0 | 2 | 13 | 26 | |
| 24 | Fejzić Hana | OŠ "Safvet-beg Bašagić", Visoko | 10 | 1 | 0 | 0 | 2 | 13 | 26 | |
| 24 | Gjocaj Arijana | "Prva osnovna škola", Velika Kladuša | 10 | 2 | 0 | 1 | 0 | 13 | 26 | |
| 24 | Hajdarević Ervin | OŠ "Solina", Tuzla | 10 | 0 | 0 | 0 | 3 | 13 | 26 | |
| 24 | Karić Amera | OŠ "Olovo", Olovo | 10 | 2 | 0 | 1 | 0 | 13 | 26 | |
| 29 | Hidić Nejla | "Prva osnovna škola", Maglaj | 10 | 2 | 0 | 0 | 0 | 12 | 24 | |
| 29 | Kajtaz Ajla | "Šesta osnovna škola", Mostar | 10 | 0 | 0 | 0 | 2 | 12 | 24 | |
| 29 | Keserović Džana | "Prva osnovna škola", Velika Kladuša | 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 12 | 24 | |
| 29 | Larma Martina | OŠ "Isak Samokovlija", Sarajevo | 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 12 | 24 | |
| 29 | Mehanović Omer Abdulkerim | OŠ "Dr. Safvet-beg Bašagić", Gradačac | 10 | 2 | 0 | 0 | 0 | 12 | 24 | |
| 34 | Bešo Amer | OŠ "Travnik", Travnik | 9 | 0 | 0 | 0 | 2 | 11 | 22 | |
| 34 | Grbić Amina | "Druga osnovna škola", Gračanica | 10 | 0 | 0 | 1 | 0 | 11 | 22 | |
| 34 | Handžić Emin | OŠ "Safvet-beg Bašagić", Visoko | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 11 | 22 | |
| 34 | Jašarević Hamza | OŠ "Safvet-beg Bašagić", Visoko | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 11 | 22 | |
| 34 | Osmanović Arnes | OŠ "Gornja Orahovica", Gračanica | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 11 | 22 | |
| 34 | Smajlović Emin | OŠ "Dr. Safvet-beg Bašagić", Sarajevo | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 11 | 22 | |
| 40 | Zuko Alen | OŠ "Fahrudin Fahro Baščelija", Goražde | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 20 | |
| 41 | Begić Hamza | OŠ "Musa Ćazim Ćatić", Sarajevo | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 18 | |
| 42 | Mušinbegović Adisa | OŠ "Đulistan", Lješovo - Podlugovi - Ilijaš | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 16 | |

Na Juniorsku matematičku olimpijadu BiH 2015 se plasiralo 10 prvoplasiranih takmičara.